## Höhere partielle Ableitungen und der Satz von Schwarz

Existiert für $f: U \to \mathbb{R}$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ die partielle Ableitung

$$\partial_i: U \to \mathbb{R}$$

für ein $i \in \{1, \dots, d\}$, so kann diese wiederum partielle Ableitungen

$$\partial_j \partial_i f: U \to \mathbb{R}$$

für $j \in \{1, \dots, d\}$ haben.

$f$ heißt *n-mal (stetig) partiell diff.bar*, falls alle partielle Ableitungen

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f: U \to \mathbb{R}$$

für $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d$ existieren (und stetig sind).

**Satz (Schwarz)** Existieren $\partial_i f$, $\partial_j f$ und $\partial_j \partial_i f$ und ist $\partial_j \partial_i f$ stetig in $x_0$, so existiert $\partial_i \partial_j f(x_0)$ und ist gleich $\partial_j \partial_i f(x_0)$.

Ist $f$ 5-mal stetig partiell diffbar, so ist z.B. $\partial_1 \partial_3 \partial_1 \partial_2 \partial_1 f = \partial_1^3 \partial_2 \partial_3 f$

*Multi-Index-Notation:* Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ist $\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f$



## Beweisidee zum Satz von Schwarz

O.B.d.A. sei $d = 2$, $i = 1$, $j = 2$. Betrachten

$$\Delta(x, y) := f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$$

Für $g(t) := f(t, y) - f(t, y_0)$ ist

$$\begin{aligned}
\Delta(x, y) &= g(x) - g(x_0) \\
&= g'(\xi)(x - x_0) \quad \text{für ein } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0 \\
&= (\partial_x f(\xi, y) - \partial_x f(\xi, y_0))(x - x_0) \\
&= \partial_y \partial_x f(\xi, \eta)(y - y_0)(x - x_0) \quad \text{für ein } \eta \text{ zwischen } y \text{ und } y_0
\end{aligned}$$

Ist $\partial_y \partial_x f$ stetig in $(x_0, y_0)$, folgt

$$\partial_y \partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{\Delta(x, y)}{(y - y_0)(x - x_0)}.$$

*Existiert* $\partial_x \partial_y f(x_0)$, so ist das gleich

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} \frac{\Delta(x, y)}{(y - y_0)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\partial_y f(x, y_0) - \partial_y f(x_0, y_0)}{(x - x_0)} = \partial_x \partial_y f(x_0, y_0).$$

## Höhere totale Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$f'\colon U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m) \cong \mathrm{M}_{m\times d}(\mathbb{R}), \qquad x_0 \mapsto (\partial_j f_i(x_0))_{i,j}$$

Ist $f'$ diffbar (z.B. alle Komponenten $\partial_j f_i$ stetig partiell diffbar), so ist

$$f''\colon U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, V)) \cong M_{m\times d\times d}(\mathbb{R})$$

gegeben durch

$$x_0 \mapsto (\partial_k \partial_j f_i(x_0))_{i,j,k}$$

und für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$f''(x_0)(a) = \left(\textstyle\sum_k \partial_k \partial_j f_i(x_0) a_k\right)_{i,j}$$

und

$$(f''(x_0)(a))(b) = \left(\textstyle\sum_{k,j} \partial_k \partial_j f_i(x_0) a_k b_j\right)_i =: (f''(x_0))(a,b)$$

Falls sie existiert, ist die $n$-te Ableitung von $f\colon U \to V$ eine Abbildung

$$f^{(n)}\colon U \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, \ldots, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^d, V)))$$

und

$$(f^{(n)}(x_0))(a,b,c,\ldots) = \left(\textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^d \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_n} f_i(x_0) a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3}\cdots\right)_i$$



## Taylorreihe einer Funktion in mehreren Variablen — der Ansatz

Sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar mit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in U$.
Gesucht: Approximation von $f$ für $x$ nahe bei $x_0$ durch Polynom.

**Idee:** Taylor-Entwicklung für $g(t) := f(x_0 + t(x - x_0))$ um $t_0 = 0$ liefert

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} t^{n+1} \text{ für ein } \lambda \in [0,t].$$

Hier ist

- $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$ für $\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0)$,
- $g'(t) = (Df(\gamma(t)))\gamma'(t) = \sum_{i=1}^d (\partial_i f)(\gamma(t)) \cdot (x - x_0)_i$, weil $\gamma'(t) = x - x_0$
- $g''(t) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\partial_j \partial_i f)(\gamma(t)) \cdot (x - x_0)_j (x - x_0)_i$
- $g^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^d (\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k} f)(\gamma(t)) \cdot (x - x_0)_{i_1}\cdots(x - x_0)_{i_k}$

## Taylorreihe einer Funktion in mehreren Variablen — Ergebnis

Wir setzen in

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!} t^{n+1} \text{ für ein } \lambda \in [0,t] \qquad (*)$$

die Formel

$$g^{(k)}(0) = \sum_{i_1=1,\dots,i_k}^{d} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f)(x_0) \cdot (x-x_0)_{i_1} \cdots (x-x_0)_{i_k}$$

ein und erhalten

$$f(x) = g(1) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{d} \frac{(\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f)(x_0)}{k!} (x-x_0)_{i_1} \cdots (x-x_0)_{i_k}$$
$$+ \sum_{i_1,\dots,i_{n+1}=1}^{d} \frac{(\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n+1}} f)(x_0 + \lambda(x-x_0))}{k!} (x-x_0)_{i_{n+1}} \cdots (x-x_0)_{i_k}$$

für ein $\lambda \in [0,1]$.
Diese Formel wird oft mit Multi-Index-Notation zusammengefasst.



## Lokale Extremstellen und die Hesse-Matrix einer Funktion

Für $n = 1$ sagt die Taylorformel: Es gibt ein $\xi$ zwischen $x$ und $x_0$ mit
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \partial_j f(\xi)(x-x_0)_i (x-x_0)_j$.

Mit der Hesse-Matrix $Hf(\xi) = (\partial_i \partial_j f(\xi))_{i,j}$ wird das
(*) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\langle (x-x_0) | (Hf)(\xi)(x-x_0) \rangle$

**Definition** Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ heißt

- positiv definit, falls $\langle y | Ay \rangle > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $y \neq 0$
- negativ definit, falls $\langle y | Ay \rangle < 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $y \neq 0$

**Satz** 1. Ist $x_0$ eine lokale Extremstelle von $f$, so folgt $f'(x_0) = 0$.

2. Ist $f'(x_0) = 0$ und $(Hf)(x_0)$ positiv definit/negativ definit, so nimmt $f$ in $x_0$ ein striktes lokales Minimum/Maximum an.

**Beweisidee von 2.** Mit (*) reicht zu zeigen: Ist $(Hf)(x_0)$ positiv definit/negativ definit, so auch $(Hf)(\xi)$ für alle $\xi$ "nahe bei $x_0$"

## Beispiel zur Bestimmung lokalen Extrema

Sei $f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1)$. Dann ist

- $f'(x,y) = (y^2 + 3x^2 + 2x,\ 2y(x-1))$
- $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{pmatrix}$
- Kandidaten für Extremstellen:

$$f'(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ (x,y) = (0,0) \text{ oder } (x,y) = (-2/3, 0)$$

- $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ (0,0)$ ist ein Sattelpunkt.
- $Hf(-2/3,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10/3 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ (-2/3,0)$ ist lok. Maximalstelle