Lokale Extremstellen und die Hesse-Matrix einer Funktion

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ und $f: U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar sowie $x_0 \in U$.

Die *Taylorformel* liefert für kleine $h \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \tfrac{1}{2}\langle h | Hf(\xi)h\rangle$$

für ein ξ zwischen x_0 und $x_0 + h$

Satz Sei $f'(x_0) = 0$.

1. Ist $(Hf)(x_0)$ positiv definit, d.h. $\langle h|(Hf)(x_0)h\rangle > 0$ für alle $h \neq 0$, so nimmt f in x_0 ein striktes lokales Minimum an.
2. Ist $(Hf)(x_0)$ negativ definit, d.h. $\langle h|(Hf)(x_0)h\rangle < 0$ für alle $y \neq 0$, so nimmt f in x_0 ein striktes lokales Maximum an.

Beweis: Determinantenkriterium von Sylvester $\Rightarrow$ Ist $(Hf)(x_0)$ positiv/negativ definit, dann auch $(Hf)(\xi)$ für alle ξ nahe bei x.

Positive/negative Definitheit und Eigenwerte

Die Hesse-Matrix $A := Hf(\xi)$ ist *symmetrisch* (Satz von Schwarz).

Satz Sei $A \in M_d(\mathbb{R})$ symmetrisch und $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ die EWe von A.

1. A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ für alle i gilt $\lambda_i > 0$.
2. A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ für alle i gilt $\lambda_i < 0$.

Beweis: Wähle eine ON-Basis $v_1, \ldots, v_d$ aus EVen zu $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. (Das geht nach dem Satz zur Hauptachsentransformation.)

Für $y = \sum_i \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^d$ folgt dann

$$\langle y|Ay\rangle = \langle \textstyle\sum_i \alpha_i v_i | A \sum_j \alpha_j v_j\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j\langle v_i|\lambda_j v_j\rangle = \sum_i \alpha_i^2\lambda_i.$$

Damit folgen dann die Äquivalenzen in **1** und **2**.

Das Determinantenkriterium von Sylvester

Sehr nützlich, aber schwieriger ist folgendes Kriterium von Sylvester:

Satz Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_d(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann gilt:

1. A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ für alle k gilt $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$
2. A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ für alle k ist $(-1)^k \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ ist negativ definit: $-1 < 0$ und $\det A = 1 > 0$.

Implizit definierte Funktionen — die Problemstellung

Problemstellung

Gegeben:

- eine Gleichung der Form $F(x, y) = 0$ mit $F\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$;
- eine Lösung (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$.

Gesucht: Funktion $x \mapsto y(x)$ auf Intervall I um x_0 mit
$$y(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad F(x, y(x)) = 0 \text{ für alle } x \in I$$

Beobachtung Sind F und $x \mapsto y(x)$ differenzierbar, so folgt
$$0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x)) = \partial_x F(x, y(x)) + y'(x) \partial_y F(x, y(x)).$$

Beispiel $0 = F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$

- für $(x_0, y_0) = (0, 1)$: $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
- für $(x_0, y_0) = (1, 0)$: keine Auflösung möglich: $\partial_y F(1, 0) = 0$ und $\partial_x F(1, 0) \neq 0$

Implizit definierte Funktionen — der wesentliche Satz

Satz Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei ferner $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $(x_0, y_0) \in U$ mit $F(x_0, y_0) = 0$ und sei

$$\partial_y F(x_0, y_0) := \begin{pmatrix} \partial_{m+1} F_1(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{m+n} F_1(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{m+1} F_n(x_0, y_0) & \cdots & \partial_{m+n} F_n(x_0, y_0) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

invertierbar. Dann existieren

- eine Umgebung V_x von x_0 und V_y von y_0
- eine stetig differenzierbare Funktion $y\colon V \to \mathbb{R}^n$

so, dass für alle $(x, y) \in V_x \times V_y$ gilt: $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$.

Beweis Aufwändig; wir diskutieren die Grundidee.

Umformulierung als Nullstellenproblem Zu gegebenem x (nahe bei x_0) ist eine Nullstelle $y(x)$ der Funktion $F(x, -)$ (nahe bei y_0) gesucht.

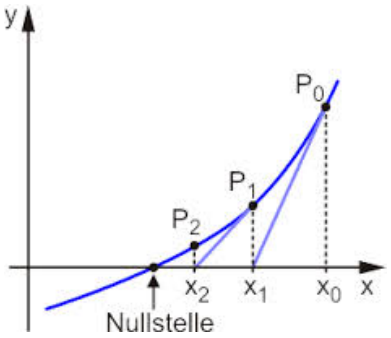
Das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen

Gegeben Eine stetig diffbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einer unbekannten Nullstelle x_*, die $f'(x_*) \neq 0$ erfüllt, und ein x_0 nahe bei x_*

Gesucht Die Nullstelle x_*

Idee Ausgehend von x_0 schrittweise bessere Approximationen $x_1, x_2, \ldots$ von x_* bestimmen und x_* als Grenzwert der x_n erhalten:

$$x_{n+1} := F(x_n) \text{ mit } F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$



Beispiel Sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben und $x_* := \sqrt{a}$ gesucht, also Nullstelle von $f(x) = x^2 - a$. Iteration: $x_{n+1} = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ *(Heron-Verfahren)*

Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz Sei

- (X, d) ein *vollständiger* metrischer Raum,
- $F: X \to X$ eine *stetige* Abbildung und *strikt kontraktiv*:

$$\exists \alpha < 1 \forall x, y \in X : d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Dann gibt es genau ein $x_* \in X$ mit $F(x_*) = x_*$.

Beweis *Eindeutigkeit:* Einfach.
Existenz: Sei $x = x_0 \in X$ beliebig und $x_n := F^n(x)$.
Dann ist $(x_n)_n$ eine Cauchy-Folge:
Per Induktion sieht man $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$ und somit

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_1, x_0)\alpha^n \sum_{i=1}^{k} \alpha^i \leq d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Somit existiert $x_* := \lim_{n\to\infty} x_n$ und

$$F(x_*) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_*.$$

Anwendung auf das modifizierte Newton-Verfahren

Gegeben Eine stetig diffbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einer unbekannten Nullstelle x_*, die $f'(x_*) \neq 0$ erfüllt, und ein x_0 nahe bei x_*

Kennt man $f'(x_*)$, so verwendet man ein modifiziertes Newton-Verfahren und betrachtet die Folge der $x_n = F^n(x_0)$ mit

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_*)}.$$

MWS: Für x, y gibt es ein ξ zwischen x und y mit

$$|F(x) - F(y)| = |x - y||F'(\xi)| = |x - y| \underbrace{\left|1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_*)}\right|}_{\to 0 \text{ für } \xi \to x_*}.$$

Für bel. $\alpha < 1$ ex. also $\delta > 0$ so, dass F auf $B_\delta(x_*)$ strikt kontraktiv ist. Nach dem Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes konvergiert dann für alle $x_0 \in B_\delta(x_*)$ die Folge der $x_n = F^n(x_0)$ gegen x_*.

Anwendung: Umkehrsatz

Definition Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Eine Abbildung $\phi: V \to W$ heißt *Diffeomorphismus*, falls f bijektiv und f, f^{-1} stetig differenzierbar sind.

Für f wie oben ist $x = (f^{-1} \circ f)(x)$, also $\mathrm{Id} = Df^{-1}(f(x))Df(x)$.

Satz Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, $u \in U$ und $Df(u)$ invertierbar. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von U so, dass $f|_V: V \to f(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis des Satz über implizite Funktionen
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $(x_0, y_0) \in U$ und $F(x_0, y_0) = 0$ sowie $\partial_y F(x_0, y_0) \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar.

Betrachte $f: U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto (x, F(x, y))$.In $u = (x_0, y_0)$ ist

$$Df(u) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ \partial_x F(x_0, y_0) & \partial_y F(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar.
Umkehrsatz $\Rightarrow$ f ist auf Umgebung V von u ein Diffeo. und

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y(x)) = (x, 0) \Leftrightarrow (x, y(x)) = f^{-1}(x, 0)$$

Beweisschritte für den Umkehrsatz

Satz Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, $u \in U$ und $Df(u)$ invertierbar. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq U$ von U so, dass $f|_V: V \to f(V)$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis-Schritte:

- Injektivität von f nahe bei u: Mittelwertsatz der DR
- Das Bild von f enthält eine Umgebung von $f(u)$:
  Gesucht ist zu gegebenem y nahe bei $f(u)$ ein x_* mit $f(x_*) = y$.
  Idee: das *Newton-Verfahren* auf $x \mapsto f(x) - y$ anwenden:
  $$x_0 = u \text{ und } x_{n+1} = x_n - Df(u)^{-1}(f(x_n) - y)$$
- Stetige Differenzierbarkeit von f^{-1} nahe bei $f(u)$: technisch.