Gewöhnliche Differenzialgleichungen
für den 2-Fach-Bachelor-Studiengang
Wintersemester 2016/17

PD Dr. Thomas Timmermann

19. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

I Skalare DGL erster Ordnung **5**

2 Explizite, skalare DGL erster Ordnung **6**

3 Lineare DGL erster Ordnung **15**

4 Existenz und Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf **22**

5 Numerische Verfahren **31**

6 Exakte Differenzialgleichungen **36**

II DGL-Systeme erster Ordnung **41**

7 Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung — Vorbemerkungen **42**

8 Autonome Systeme von Differenzialgleichungen **43**

9 Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten **50**

10 Lineare DGL-Systeme erster Ordnung **64**

III Lineare skalare DGL höherer Ordnung **67**

11 Reduktion auf Systeme erster Ordnung **67**

12 Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten **68**

IV Ausblick **76**

13 Variationsrechnung **76**

Liste der Vorlesungen

Vorlesung vom 18.10.16 1
Vorlesung vom 21.10.16 6
Vorlesung vom 25.10.16 9
Vorlesung vom 28.10.16 13
Vorlesung vom 04.11.16 17
Vorlesung vom 08.11.16 21
Vorlesung vom 11.11.16 25
Vorlesung vom 15.11.16 29
Vorlesung vom 18.11.16 31
Vorlesung vom 22.11.16 35
Vorlesung vom 25.11.16 38
Vorlesung vom 09.12.16 45
Vorlesung vom 13.12.16 48
Vorlesung vom 16.12.16 51
Vorlesung vom 20.12.16 55
Vorlesung vom 10.01.17 58
Vorlesung vom 13.01.17 61
Vorlesung vom 17.01.17 64
Vorlesung vom 20.01.17 67
Vorlesung vom 24.01.17 70
Vorlesung vom 27.01.17 73
Vorlesung vom 31.0.1.17 76
Vorlesung vom 03.02.17 79

Literatur

[Aul04] Bernd Aulbach. *Gewöhnliche Differenzialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Cle70] John C. Clegg. *Variationsrechnung.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1970. Übersetzt aus dem Englischen durch I. Haubitz.

[FH05] Wilhelm Forst and Dieter Hoffmann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Theorie und Praxis – vertieft und visualisiert mit Maple.* Berlin: Springer, 2005.

[Heu06] Harro Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. B. G. Teubner, Stuttgart, fifth edition, 2006. Einführung in Lehre und Gebrauch. [Introduction to theory and application].

[Kön93] Konrad Königsberger. *Analysis. 2.* Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[uRCD00] William E. Boyce und Richard C. DiPrima. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Spektrum Akademischer Verlag, 2000.

[Wal93] Wolfgang Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 1993. Eine Einführung. [An introduction].

[Wei74] Robert Weinstock. *Calculus of variations.* Dover Publications, Inc., New York, 1974. With applications to physics and engineering, Reprint of the 1952 edition.

[Wir06] Günther J. Wirsching. *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung mit Beispielen, Aufgaben und Musterlösungen.* Wiesbaden: Vieweg, 2006.

1 Einleitung

18.10.16

Wir beschreiben die in der Vorlesung untersuchten gewöhnlichen Differenzialgleichungen, umreißen die uns interessierenden Fragestellungen und den Aufbau der Vorlesung und skizzieren typischen Anwendungsbeispiele.

Differenzialgleichungen als mathematische Modelle realer Probleme

Die mathematische Modellierung von Problemen aus den Naturwissenschaften, aber auch der Ökonomie, führt oft auf Differenzialgleichungen. Aus deren mathematischer Analyse erhofft man sich Aussagen über die ursprünglichen Probleme:

$$\text{Anwendung} \xrightarrow[\text{Modellierung}]{\text{mathematische}} \text{Differenzialgleichung} \xrightarrow[\text{Analyse}]{\text{mathematische}} \begin{array}{c}\text{quantitative/qualitative}\\ \text{Aussagen}\end{array}$$

Wir konzentrieren uns in der Vorlesung nicht nur auf die mathematische Analyse, sondern wollen auch viele Anwendungs-Beispiele behandeln.

Die mathematische Analyse wird schon für einfache Modelle oft sehr schwierig. Beispielsweise ist die Analyse der sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen, welche Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen beschreiben, eines der 7 Milleniums-Probleme der Mathematik (wie die gelöste Poincaré-Vermutung und die offene Riemannsche Vermutung), für deren Lösung jeweils eine Million Dollar Preisgeld ausgeschrieben ist. Die Kombination unzureichender mathematischer Modellierung und -analyse kann z.B. in der Finanzwirtschaft verheerende reale Folgen haben.

Eingrenzung der betrachteten Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen treten in vielen verschiedenen Varianten auf. Wir betrachten hauptsächlich *gewöhnliche Differenzialgleichungen*. Diese beschreiben eine Beziehung zwischen

- einer *unabhängigen Größe*, oft der Zeit, etwa mit t bezeichnet,
- einer oder mehrerer *davon abhängigen Größen* $y_1, \dots, y_k$, die also Funktionen in t sind und die differenzierbar von t abhängen,
- den Ableitungen $y_1', \dots, y_k'$ der abhängigen Größen nach t,
- möglicherweise auch noch höheren Ableitungen $y_1'', \dots, y_k''$ etc. nach t

in Form einer Gleichung

$$0 = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)), \tag{1}$$

wobei man praktischerweise die abhängigen Größen $y_1, \dots, y_k$ zu einem Vektor $y = (y_1, \dots, y_k)$ zusammenfasst, also

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{pmatrix}, \qquad y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_k'(t) \end{pmatrix}, \qquad \dots,$$

und die Funktion f sozusagen das mathematische Modell darstellt.

Eine *Lösung* dieser Gleichung *auf einem Intervall* $[a, b]$ ist dann gegeben durch n-mal differenzierbare Funktionen $y_1, \dots, y_k \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ bzw. $y \colon [a, b] \to \mathbb{R}^k$, welche (1) für alle $t \in [a, b]$ erfüllen, wobei für $t = a$ und $t = b$ jeweils die rechts- bzw. linksseitigen Ableitungen zu einzusetzen sind. Lösungen auf offenen Intervallen (a, b) oder halboffenen Intervallen $[a, b)$ oder $(a, b]$ sind analog definiert.

Die *Ordnung* der DGL (1) ist die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung von y, also n. In Anwendungen ist meist $n = 1$ oder $n = 2$; aus theoretischer Sicht kann man sich auf den Fall $n = 1$ einschränken (siehe später).

Fragestellungen der mathematischen Analyse

Typische Fragen lauten:

- *Existieren* Lösungen, zum Beispiel

  1. die gewisse *Anfangsbedingungen* für $y(a), y'(a), \dots, y^{(n)}(a)$
  2. oder *Randbedingungen* für $y(a), y'(a), \dots, y^{(n)}(a)$ und $y(b), y'(b), \dots, y^{(n)}(b)$

  erfüllen? Bei der Modellierung realer Probleme ist die Existenz von Lösungen im Fall (a) oft empirisch klar.

- Sind diese Lösungen *eindeutig*?

- Kann man Lösungen *explizit* angeben? Wie für die Berechnung von Integralen gibt es dazu einige Heuristiken/Methoden und Formelsammlungen. Die meisten findet man in dem Standardwerk *"Differentialgleichungen — Lösungsmethoden und Lösungen"* von Erich Kamke. Diese Fragestellung stand historisch lange im Vordergrund.

- Wie verhalten sich die Lösungen *qualitativ*, z.B. für $t \to \infty$? Wie *stabil* bleiben die Lösungen bei kleinen Änderungen der Anfangswerte? Diese Fragestellungen führen zur Theorie *dynamischer Systeme*.

- Wie lassen sich Lösungen *näherungsweise (numerisch) berechnen*? Dies ist für die Anwendungen die wohl wichtigste Frage und führt zur Disziplin der *Numerik*.

Abgrenzung zu anderen Varianten

- *Partielle DGLn* treten auf, wenn die gesuchten Größen $y_1, \dots, y_k$ von *mehreren* unabhängigen Größen abhängen, zum Beispiel neben der Zeit t auch vom Ort $x = (x_1, \dots, x_3)$. Diese sind für Anwendungen sehr wichtig, aber auch sehr kompliziert.
- *Stochastische DGLn* treten z.B. in der Ökonomie auf, wenn die gesuchten Größen $y_1(t), \dots, y_k(t)$ *Zufallsgrößen* sind. Auch diese sind sehr kompliziert.
- *Differenzengleichungen* treten auf, wenn die unabhängige Größe t nur gewisse Werte $t_0, t_1, \dots$ annehmen kann, also z.B. statt einer kontinuierlichen eine schrittweise Zeitentwicklung betrachtet wird; dann tritt an Stelle von (1) eine Gleichung der Form

$$0 = f\Big(t_i, y(t_i), \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \dots\Big).$$

Geplante Inhalte der Vorlesung

- DGL erster Ordnung der Form $y'(t) = f(t, y(t))$ mit skalarem y
  - Lineare DGL
  - Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen
  - Bevölkerungsentwicklung und die logistische Gleichung
  - Exakte DGL, Potentiale und Kurvenintegrale
- Räuber-Beute-Modelle
- DGLn höherer Ordnung und DGL-Systeme
  - Lineare DGL-Systeme
  - Lineare Differenzengleichungen
  - Stabilität und Periodizität von Lösungen
  - Variationsprobleme
  - Die schwingende Saite und Fourier-Reihen
  - Lineare Randwertprobleme

Beispiele von Modellen zur Entwicklung von Populationen

Die folgenden Beispiele geben einen Ausblick auf die Modelle und Differenzialgleichungen, die wir in der Vorlesung genauer studieren werden.

Beispiel 1.1 (*Kaninchen-Vermehrung nach Fibonacci*)**.** Fibonacci betrachtete für die Vermehrung einer Population von Kaninchen folgendes bekannte und stark vereinfachte Modell:

1. Im Jahr 1 der Betrachtung besteht die Population aus einem (gerade neu geborenen) Kaninchenpaar.
2. Jedes Kaninchenpaar, *das älter als ein Jahr ist,* bringt jeden Sommer *genau ein neues* Kaninchenpaar zur Welt.
3. Alle Kaninchen sind unsterblich.

Dann gibt es also in den Jahren

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \dots$$

gerade

$$0, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad \dots$$

Kaninchenpaare. Bezeichnet f_n die Anzahl der Paare im Jahr n, so gilt also

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1, \qquad f_{n+1} - f_n = f_{n-1} \text{ bzw. } f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Diese *Fibonacci-Zahlen* wurden intensiv studiert. Eine explizite Formel für die f_n kann man z.B. mit Hilfe der linearen Algebra herleiten: Die Vektoren

$$F_n := \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

erfüllen

$$F_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n + f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = AF_n \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$F_{n+1} = AF_n = A^2F_{n-1} = \cdots = A^nF_1.$$

Nun benutzen wir die Eigenwerttheorie: Die Matrix A hat zwei verschiedene Eigenwerte λ_1, λ_2. Wählt man zugehörige Eigenvektoren v_1, v_2, so bilden diese eine Basis von $\mathbb{R}^2$, also gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $F_1 = c_1v_1 + c_2v_2$ und

$$F_{n+1} = A^nF_1 = A^n(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2.$$

Beispiel 1.2 (*Vermehrung von Bakterien*)**.** Bakterien vermehren sich nicht nur im Sommer, sondern ständig. Ein einfaches Modell zur Vermehrung einer Population von Bakterien sieht so aus:

Bezeichne

- $y(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt t,
- $y(t + \Delta t)$ die Größe nach einem kurzen Zeitraum Δt.

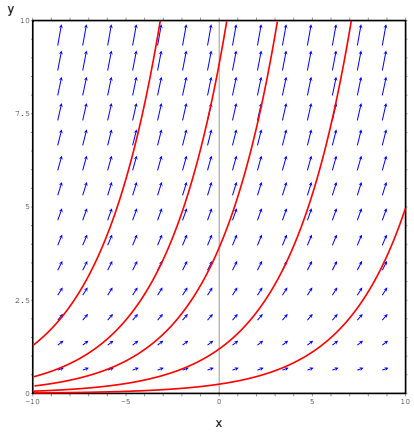


Abbildung 1: Exponentielles Wachstum

Dann beträgt der Zuwachs während "hinreichend kleiner" Zeiträume $\Delta t > 0$ etwa

$$y(t + \Delta t) - y(t) \sim \underbrace{(\alpha - \beta)}_{=:\lambda} \cdot y(t) \cdot \Delta t \tag{2}$$

mit einer gewissen *Geburtenrate* α, *Sterberate* β und resultierender *Änderungsrate* $\lambda = \alpha - \beta$, die jeweils von der Bakterienart und den als konstant angenommenen äußeren Einflüssen abhängen. Dabei gilt (2) umso genauer, je kleiner Δt wird, beziehungsweise

$$y'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lambda y(t). \tag{3}$$

Hier kann man Lösungen raten — bei einer gegebenen Anfangspopulation $y(0) = y_0$ hat (3) die eindeutige Lösung

$$y(t) = y_0 \mathrm{e}^{\lambda},$$

denn

$$y(0) = y_0 \cdot 1 \quad \text{und} \quad y'(t) = y_0 \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda y(t).$$

Teil I
Skalare DGL erster Ordnung

2 Explizite, skalare DGL erster Ordnung

21.10.16

Problemstellung

Wir betrachten nun folgende DGLn:

Definition 2.1. *Ein* explizite, skalare Differenzialgleichungen erster Ordnung *ist eine Gleichung der Form*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{4}$$

mit einer gegebenen Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ *mit* $U \subseteq \mathbb{R}^2$*. Fordert man zusätzlich*

$$y(t_0) = y_0 \tag{5}$$

mit gegebenen $(t_0, y_0) \in U$ *vor, so spricht man von einem* (expliziten, skalaren) Anfangswertproblem 1. Ordung*, kurz* AWP.

Eine Lösung *dieses AWPs ist ein Funktion* $y\colon [t_0, b) \to \mathbb{R}$ *(mit möglichst großem* b*), die* (4) *und* (5) *erfüllt. Dazu muss insbesondere*

- y *auf* (t_0, b) *differenzierbar sein,*
- $y'(t_0)$ *als rechtsseitige Ableitung* $\lim_{h \searrow 0} \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}$ *existieren;*
- $(t, y(t)) \in U$ *für alle* $t \in [t_0, b)$ *gelten.*

Veranschaulichung durch das Richtungsfeld

Eine Lösungskurve der DGL (4) muss in jedem Punkt $(t, y) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, den sie durchläuft, in Richtung des Vektors $(1, f(t, y))$ verlaufen. Zur Veranschaulichung kann man das zu f gehörige ebene *Richtungsfeld* skizzieren, in das man an Gitterpunkten (t, y) eines ausreichend dicht gewählten Gitters jeweils den Vektor $(1, f(t, y))$ (eventuell skaliert mit einem einheitlichen Faktor) einzeichnet, wie etwa in der Abbildung 1.

Eulersche Polygonzüge

Ein naheliegendes Verfahren zur Berechnung einer Näherungslösung $\tilde{y}$ des AWP sieht wie folgt aus:

Wähle Gitterpunkte $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ und setze $\tilde{y}$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ für $i = 0, 1, 2, \dots$ geradlinig mit $\tilde{y}(t_0) := y_0$ und

$$\tilde{y}(t_{i+1}) := \tilde{y}(t_i) + f(t_i, \tilde{y}(t_i)) \cdot (t_{i+1} - t_i) \text{ für } i = 0, 1, \dots.$$

Die Näherungslösung $\tilde{y}$ hat also nicht in jedem Punkt t den Anstieg $f(t, \tilde{y}(t))$, sondern behält auf den Intervallen $[t_i, t_{i+1})$ jeweils den "eingefrorenen" Anstieg $f(t_i, \tilde{y}(t_i))$ bei.

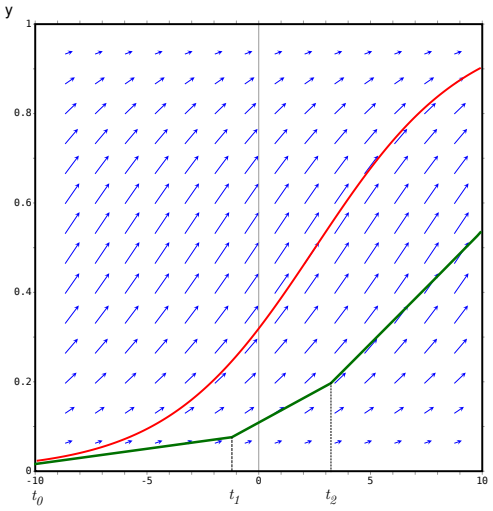


Abbildung 2: Näherungslösung (grün) nach Eulerschem Polygonzugverfahren

Man hofft, dass sich die Näherungslösung $\tilde{y}$ der richtigen Lösung des AWP beliebig genau annähert, wenn die Intervallabstände $|t_{i+1} - t_i|$ hinreichend klein gewählt werden. Wir zeigen später, dass dies unter geeigneten Bedingungen an die Funktion f tatsächlich passiert. Wir werden auch (Runge-Kutta-)Verfahren kennenlernen, die mit wenig Mehraufwand deutlich bessere Näherungen erzielen.

Bemerkung 2.2. Wir werden meist DGL der Form (4) betrachten, bei denen die Funktion f auf einer *offenen* Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ definiert und *stetig* ist. Insbesondere ist dann für jede Lösung y von (4) mit y und f die rechte Seite in (4) stetig abhängig von f, also auch y' *stetig*.

In einfachen Fällen kann man das obige Verfahren direkt analysieren:

Beispiel 2.3. Wir betrachten die DGL $y'(t) = \lambda y$ mit $\lambda > 0$ und untersuchen für ein $b > t_0$ den Wert der Näherungslösung $\tilde{y}(b)$ für den Fall eines gleichmäßigen Gitters $t_0, \dots, t_n = b$ mit Schrittweite $\delta = \frac{b - t_0}{n}$. Hier wird

$$\tilde{y}(t_1) = y_0 + \lambda y_0 \delta = (1 + \lambda\delta) y_0, \quad \tilde{y}(t_2) = (1 + \lambda\delta)\tilde{y}(t_1) = (1 + \lambda\delta)^2 y_0, \quad \dots,$$

und schließlich

$$\tilde{y}(b) = \tilde{y}(t_n) = (1+\lambda\delta)^n y_0 = \left(1+\lambda\frac{b-t_0}{n}\right)^n y_0.$$

Aus der zur Definition der Eulerschen Konstante e in der Analysis 1 benutzten Beziehung

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

folgt, wenn wir die Anzahl der Gitterpunkte gegen unendlich gehen lassen,

$$\tilde{y}(b) \xrightarrow{n\to\infty} e^{\lambda(b-t_0)} y_0$$

Das ist genau der Wert der exakten Lösung, die durch $y(t) = e^{\lambda(t-t_0)}y_0$ gegeben ist.

Ein Spezialfall

Falls $f(t,y)$ in nicht von y abhängt, also eine Funktion g mit $f(t,y) = g(t)$ für alle $(t,y) \in U$ existiert, so sind die Lösungen von (4) gerade die Stammfunktionen von g. Solche existieren natürlich nur unter bestimmten Annahmen an g.

Satz 2.4. *Seien $t_0, b \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$ und $g\colon [t_0, b) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das AWP*

$$y'(t) = g(t), \quad y(t_0) = y_0$$

auf $[t_0, b)$ eine eindeutige Lösung y, gegeben durch

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s)ds \quad \textit{für alle } t \in t_0. \tag{6}$$

Beweis. Das folgt direkt aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. □

Historisch bezeichnet man deswegen das Lösen einer DGL auch als "Integrieren der DGL".

In diesem Fall entspricht das Eulersche Polygonzugverfahren der Approximation des Integrals in (6) durch eine Fläche von Rechtecken, siehe Abb. 3.

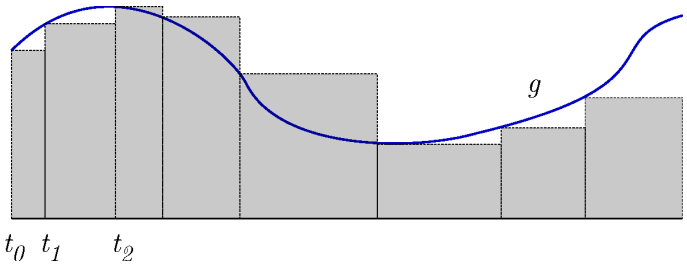


Abbildung 3: Approximation des Integrals in (6) beim Polygonzugverfahren

Lösung durch Trennung der Variablen

Betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel 2.5 (*Schneeball-Schmelze*)**.** Wir betrachten einen kugelförmigen Schneeball, der gleichmäßig schmilzt, wobei das in einer kurzen Zeit abschmelzende Volumen in etwa proportional zur Oberfläche sei. Wir drücken die Oberfläche mit Hilfe des Volumens aus und suchen eine Differenzialgleichung für die Entwicklung des Volumens. Volumen V und Oberfläche A einer Kugel mit Radius r sind gegeben durch

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad A = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} = c \cdot V^{2/3}$$

mit geeignetem c. Daraus ergibt sich die Differenzialgleichung

$$V'(t) = -\lambda V(t)^{2/3}, \tag{7}$$

wobei λ durch c und die Schmelzrate bestimmt wird. Wir stellen diese Gleichung um und sehen mit der Kettenregel

$$-\lambda = V'(t)V(t)^{-2/3} = 3\frac{d}{dt}\left(V(t)^{\frac{1}{3}}\right).$$

Dies ist eine DGL für $V(t)^{1/3}$, die wir wie in Lemma 2.4 lösen können:

$$V(t)^{1/3} = V(t_0)^{1/3} - \lambda(t - t_0)$$

beziehungsweise

$$V(t) = \left(-\lambda(t - t_0) + V(t_0)^{1/3}\right)^3.$$

Schreiben wir die DGL (7) in der Form $V'(t) = f(t, V(t))$, so hängt die Funktion f nicht vom ersten Argument t, sondern nur vom zweiten Argument $V(t)$ ab. Dies ist ein Gegenstück zum in Lemma 2.4 betrachteten Spezialfall und ähnlich lösbar. 25.10.16

Wir betrachten nun den etwas allgemeineren Fall eines *Anfangswertproblems mit getrennten Variablen*

$$y'(t) = g(t)/h(y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{8}$$

wobei g und h stetige Funktionen sind mit $h(y) \neq 0$ in einer Umgebung von y_0.
Schreiben wir $y'(t) = \frac{dy}{dt}(t)$, so liefert rein symbolische Manipulation

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{h(y)} \Leftrightarrow h(y)dy = g(t)dt \Leftrightarrow \int h(y)dy = \int g(t)dt.$$

Satz 2.6. *Seien $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und g und h auf offenen Intervallen um t_0 bzw. y_0 definierte stetige Funktionen mit $h(y_0) \neq 0$. Setze*

$$G(t) := \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \qquad H(y) := \int_{y_0}^{y} h(z)dz.$$

1. *Erfüllt y das AWP (8), so folgt $H(y(t)) = G(t)$ für alle t nahe bei t_0.*
2. *Die Funktion H ist auf einer Umgebung von y_0 invertierbar und die Funktion $y := H^{-1} \circ G$ löst auf einer Umgebung von t_0 das AWP (8).*

Beweis. (1) Die Differenz $H(y(t))-G(t)$ hat für $t = t_0$ den Wert $H(y_0)-G(t_0) = 0-0 = 0$ und (nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) die Ableitung

$$\frac{d}{dt}\left(H(y(t)) - G(t)\right) = h(y(t))y'(t) - g(t) = 0.$$

Folglich ist diese Differenz konstant 0.

(2) Aus $H'(y) = h(y)$ (Hauptsatz) und $h(y_0) \neq 0$ folgt mit der Stetigkeit von h auch $H'(y) \neq 0$ auf einer Umgebung von y_0. Auf dieser Umgebung ist H also streng monoton, nach Analysis 1 invertierbar, das Inverse H^{-1} differenzierbar und

$$(H^{-1})'(z) = \frac{1}{H'(H^{-1}(z))} = \frac{1}{h(H^{-1}(z))}.$$

Mit der Kettenregel folgt

$$y'(t) = (H^{-1})'(G(t))G'(t) = \frac{1}{h(H^{-1}(G(t)))}g(t) = \frac{1}{h(y(t))}g(t). \qquad \square$$

Zur Erinnerung wiederholen wir kurz den Mittelwertsatz aus der Analysis 1:

Satz (Mittelwertsatz)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bildlich: Es gibt einen Punkt $\xi \in (a,b)$, in dem die Tangente an den Graphen von f denselben Anstieg hat wie die Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

Folgerung. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f streng monoton wachsend.

Beweis. Andernfalls existieren $a', b' \in [a,b]$ mit $a' < b'$ und $f(a') \geq f(b')$. Der Mittelwertsatz, angewendet auf die Einschränkung $f|_{[a',b']}$, liefert ein $\xi \in (a',b')$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} \leq 0$$

im Widerspruch zur Annahme an f'. $\square$

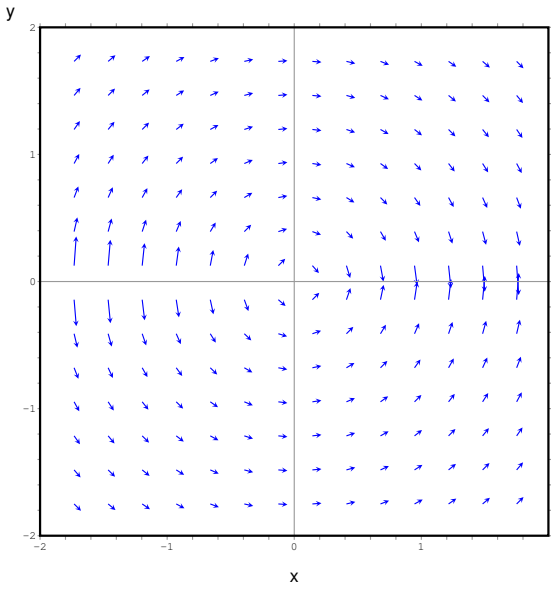


Abbildung 4: Richtungsfeld zur DGL $y'(t) = -t/y$

Üben wir das Vorgehen an einigen Beispielen:

Beispiel 2.7. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = -\frac{t}{y} \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$$

Im zugehörigen Richtungsfeld steht in jedem Punkt (t, y) der Richtungsvektor $(1, -t/y)$ senkrecht auf (t, y). Wir wenden Satz 2.6 mit $g(t) = -t$ und $h(y) = y$ an und erhalten als Lösung

$$-\frac{1}{2}t^2 = \int_0^t -s\,ds = \int_1^y z\,dz = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

also

$$y(t) = \sqrt{1 - t^2}.$$

Diese Lösung ist definiert für alle $t \in [-1, 1]$ und erfüllt die gegebene DGL für alle $t \in (-1, 1)$. Zur Probe rechnen wir

$$y'(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{1 - 2t^2}} = -\frac{t}{y(t)}.$$

Beispiel 2.8. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \mathrm{e}^y \sin t \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0$$

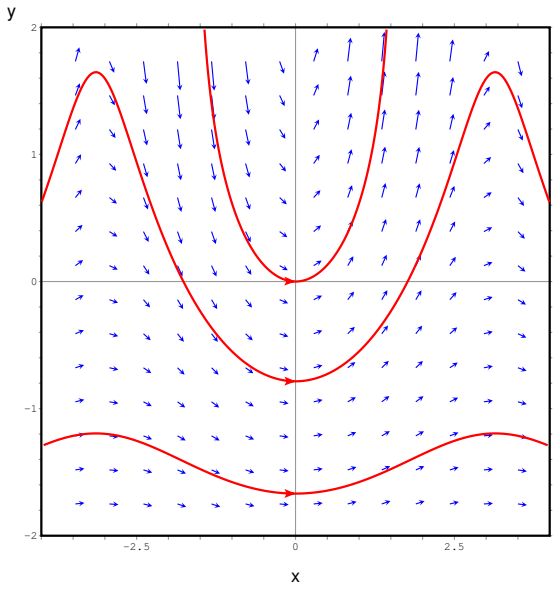


Abbildung 5: Richtungsfeld und Lösungen zur DGL $y'(t) = \mathrm{e}^y \sin(x)$

und erhalten

$$\mathrm{e}^{-y_0} - \mathrm{e}^{-y} = \int_{y_0}^{y} \mathrm{e}^{-z}\, dz = \int_0^t \sin s\, ds = 1 - \cos t,$$

also

$$y(t) = -\ln(\mathrm{e}^{-y_0} + \cos t - 1), \quad \text{sofern } \mathrm{e}^{-y_0} + \cos t - 1 > 0.$$

Da $\mathrm{e}^{-y_0} > 0$ und $\cos 0 = 1$, ist die zweite Bedingung zumindest erfüllt, wenn $|t|$ hinreichend klein ist. Sie ist genau dann für alle $t \geq 0$ erfüllt, wenn $\mathrm{e}^{-y_0} > 2$, also $y_0 \leq -\ln 2$.

Substitutionen zur Rückführung auf getrennte Variablen

Folgende DGLn können durch Substituion auf eine DGL mit getrennten Variablen zurückgeführt werden:

- Die DGL

$$y'(t) = f(at + by(t) + c) \quad \text{mit } b \neq 0 \tag{9}$$

löst man durch die Substitution

$$u(t) := at + by(t) + c.$$

Man erhält für u die DGL

$$u'(t) = a + by'(t) = a + bf(u(t)),$$

bei der die rechte Seite nur von $u(t)$ abhängt. Diese DGL löst man mit Satz 2.6. Aus u kann man dann einfach y berechnen.

- Eine DGL der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \tag{10}$$

heißt *Euler-homogene* oder *Ähnlichkeits-DGL*. Solch eine ist in Beispiel 2.7 bereits aufgetreten. Die Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

führt zu der DGL

$$u'(t) = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2} = \frac{f(u(t))}{t} - \frac{u(t)}{t} = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t},$$

die wieder mit Satz 2.6 gelöst werden kann.

Nach Durchführen dieser Substitutionen kann es immer noch passieren, dass die in Satz 2.6 zu bildenden Integrale schwierig oder nicht explizit zu bestimmen sind.

Beispiel 2.9 (Parabolspiegel)**.** Im Nullpunkt der Ebene befinde sich eine punktförmige Lichtquelle. Wir suchen einen Spiegel, der alle ihre Strahlen parallel zur y-Achse reflektiert, und beschreiben ihn durch eine Kurve y. Wir betrachten einen Punkt $(t, y(t))$ auf dieser Kurve; siehe Abbildung 6. Die Betrachtung der Dreiecke ABC und CDE liefert

$$\frac{t}{y(t)} = \tan 2\alpha \quad \text{und} \quad y'(t) = -\tan\alpha.$$

Die Additionstheorem der Winkelfunktionen liefern

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin 2\alpha} = 2\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = 2\frac{\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha},$$

also

$$-\frac{t}{y(t)} = \frac{2y'(t)}{1 - y'(t)^2}.$$

28.10.16

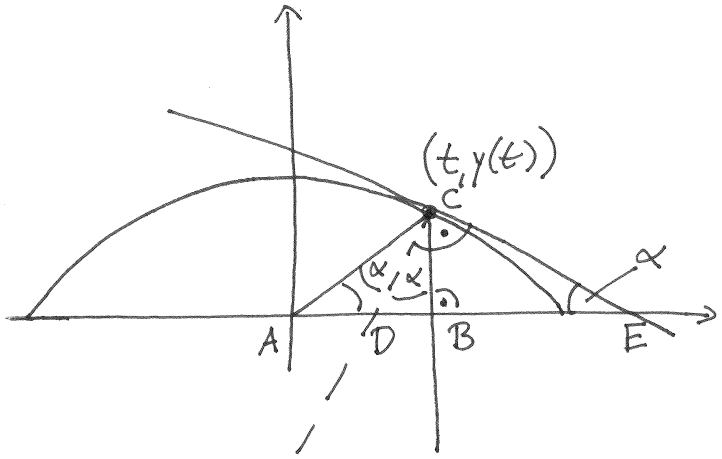


Abbildung 6: Parabolspiegel

Wir bilden die Kehrwerte, multiplizieren mit $2y'(t)$ und erhalten für $y'(t)$ die quadratische Gleichung

$$y'(t)^2 - 2\frac{y(t)}{t}y'(t) + 1 = 0.$$

Die quadratische Lösungsformel liefert

$$y'(t) = \frac{y(t)}{t} \pm \sqrt{\frac{y(t)^2}{t^2} + 1},$$

also eine Euler-homogene DGL. Die obige Substitution $u(t) = y(t)/t$ führt auf

$$u'(t) = \pm\frac{\sqrt{u(t)^2+1}}{t}$$

und anschließende Trennung der Variablen auf

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \pm\int \frac{dt}{t}.$$

Die Integration beider Seiten und geeignete Umformungen (ÜA) liefern schließlich

$$u(t) = \pm\frac{\alpha t - \frac{1}{\alpha t}}{2} \text{ mit } \alpha = \mathrm{e}^c$$

und

$$y(t) = u(t)t = \pm\frac{\alpha t^2 - \frac{1}{\alpha}}{2}.$$

3 Lineare DGL erster Ordnung

Wir betrachten unser einfachstes Modell zur Entwicklung einer Population

$$y'(t) = \lambda y(t) \tag{11}$$

(vgl. Beispiel 1.2). Nehmen wir nun an, dass

1. die Vermehrungsrate λ nicht konstant bleibt, sondern zeitlich schwankt (z.B. durch Umwelteinflüsse),
2. der Population mit einer gewissen Rate Mitglieder entnommen oder zugeführt werden,

so müssen wir (11) ersetzen durch die DGL

$$y'(t) = \lambda(t)y(t) + \mu(t) \quad \text{bzw.} \quad y'(t) - \lambda(t)y(t) = \mu(t). \tag{12}$$

mit gewissen Funktionen λ und μ.

Definition 3.1. *Eine DGL der Form* (12) *heißt* lineare skalare DGL 1. Ordnung. *Im Fall* $\mu \equiv 0$ *heißt sie* homogen, *sonst* inhomogen. *Entsprechend spricht man von* linearen (homogenen/inhomogenen) AWPen.

Wir gehen später auf die Ähnlichkeit zu linearen Gleichungssystemen ein.

Lösung im homogenen Fall

Wie löst man solch eine lineare DGL? Im *homogenen Fall* durch Trennung der Variablen: Ist $y(t) = 0$, so folgt $y'(t) = 0$ und wir erhalten $y \equiv 0$ als *triviale Lösung*. Im Fall $y(t) \neq 0$ können wir die Variablen trennen:

$$y'(t) = \lambda(t)y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \lambda(t) \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y(t)| = \int \lambda(t)\,dt.$$

Satz 3.2. *Es habe* $\lambda\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *eine Stammfunktion* Λ *(z.B. sei* λ *stetig,* $t_0 \in (a,b)$ *und*

$$\Lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds.$$

Dann hat die lineare homogene DGL

$$y'(t) - \lambda(t)y(t) = 0$$

auf (a,b) *die allgemeine Lösung*

$$y(t) = C \cdot e^{\Lambda(t)} \quad \textit{mit } C \in \mathbb{R} \textit{ beliebig.} \tag{13}$$

Insbesondere hat für jedes $t_0 \in (a,b)$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}$ *das lineare homogene AWP*

$$y'(t) - \lambda(t)y(t) = 0 \quad \textit{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

auf $[t_0, b)$ *die eindeutige Lösung* $y(t) = y_0 e^{(\Lambda(t)-\Lambda(t_0))}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.6, wobei sich der Beweis noch vereinfacht: (13) definiert eine Lösung, weil nach Kettenregel und Definition der Stammfunktion gilt:

$$y'(t) = C\Lambda'(t)\mathrm{e}^{\Lambda(t)} = \lambda(t)y(t).$$

Ist $\tilde{y}$ eine weitere Lösung, so hat die Funktion

$$z(t) = \tilde{y}(t) \cdot \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} \tag{14}$$

nach Produktregel die Ableitung

$$z'(t) = \tilde{y}'(t) \cdot \mathrm{e}^{-\Lambda(t)} + \tilde{y}(t) \cdot (-\lambda(t)\mathrm{e}^{-\Lambda(t)}) = \lambda(t)\tilde{y}(t)\mathrm{e}^{-\Lambda(t)} - \lambda(t)\tilde{y}(t)\mathrm{e}^{-\Lambda(t)} = 0,$$

ist also konstant, d.h. $\tilde{y}(t) = \underbrace{z(t)}_{=:C}\mathrm{e}^{\Lambda(t)}$. Die Aussage zum AWP folgt analog. □

Lösung im inhomgenen Fall durch Variation der Konstanten

Die inhomogene DGL

$$y'(t) - \lambda(t)y(t) = \mu(t)$$

löst man, indem man

1. eine nicht-triviale Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL $y'(t) - \lambda(t)y(t) = 0$ bestimmt (Satz 3.2),
2. den Ansatz

$$y(t) = c(t)y_h(t)$$

benutzt: dieser liefert

$$\begin{aligned} y'(t) - \lambda(t)y(t) &= c'(t)y_h(t) + c(t)y_h'(t) - \lambda(t)c(t)y_h(t) && \text{(Produktregel)} \\ &= c'(t)y_h(t) + c(t) \cdot 0 && \text{(weil } y_h \text{ die homogene DGL löst)} \end{aligned} \tag{15}$$

und somit

$$c'(t) = \frac{\mu(t)}{y_h(t)}.$$

Setzen wir für y_h die Formel aus Satz 3.2 ein und nehmen wir zur Vereinfachung an, dass λ und μ stetig sind, so erhalten wir:

Satz 3.3. *Seien $\lambda, \mu\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig und $t_0 \in (a,b)$. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL*

$$y'(t) - \lambda(t)y(t) = \mu(t)$$

gegeben durch

$$y(t) = y_0 e^{\Lambda(t)} + \int_{t_0}^{t} \mu(s) e^{(\Lambda(t)-\Lambda(s))} ds \quad \textit{mit} \quad \Lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds \quad \textit{und} \quad y_0 \in \mathbb{R} \textit{ beliebig.} \tag{16}$$

Beweis. Mit (15) folgt, dass (16) eine Lösung ist, denn $y_h(t) := \mathrm{e}^{\Lambda(t)}$ löst die homogene DGL und

$$c(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(s) \mathrm{e}^{-\Lambda(s)} ds \tag{17}$$

erfüllt $c'(t) = \mu(t)\mathrm{e}^{-\Lambda(t)} = \mu(t)/y_h(t)$.

Eindeutigkeit der Lösung: siehe Übung. □

Wir betrachten ein paar Beispiele:

Beispiel 3.4 (Mischprozess, s. [Heu06])**.** *Aufgabe:* Ein Tank enthalte 1000 Liter Wasser, in dem 50 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute

- 10 Liter der Lösung ausfließen und
- 10 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zufließen.

Ein Superrührgerät mische das Ganze sofort und vollständig durcheinander. Wie groß ist der Salzgehalt im Tank zur Zeit $t > 0$?

Modell: Bezeichne $y(t)$ den Salzgehalt (in kg) im Tank zum Zeitpunkt t. In einer kurzen Zeit von Δt Minuten fließt dann etwa

- $\Delta t \cdot \frac{10 \frac{l}{\mathrm{min}}}{1000 l} \cdot y(t)$ Salz ab und
- $\Delta t \cdot 2 \frac{kg}{\mathrm{min}}$ Salz zu,

was uns zu dem AWP

$$y'(t) = 2 - \frac{1}{100} y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = 50$$

führt. 04.11.16

Lösungs-Schritt (1): Eine Lösung der homogenen DGL $y'(t) = -\frac{1}{100} y(t)$ ist

$$y_h(t) = \mathrm{e}^{-t/100}.$$

Lösungs-Schritt (2): Wir lösen die inhomogene DGL durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz $y(t) = c(t)y_h(t)$ und erhalten nach Einsetzen in die DGL

$$c'(t) = 2\mathrm{e}^{t/100},$$

also

$$c(t) = c_0 + 200\mathrm{e}^{t/100} \quad \text{für ein } c_0 \in \mathbb{R}$$

und somit

$$y(t) = y_h(t)c(t) = c_0\mathrm{e}^{-t/100} + 200.$$

Lösung Schritt (3): Zur Erfüllung der Anfangsbedingung $y(0) = 50$ muss $c_0 = 50 - 200 = -150$ gewählt werden, also

$$y(t) = 200 - 150\mathrm{e}^{-t/100}.$$

Folgerung: Der Salzgehalt des Tankes stabilisert sich also bei

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 200$$

Kilogramm, die Konzentration also bei $200kg/1000l$, was der Konzentration des Zuflusses $(2kg/10l)$ entspricht.

Beispiel 3.5. Ein Pferd läuft in x-Richtung bei $x(0) = l > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_p los. Ein beliebig dehnbares homogenes Band ist mit einem Ende im Nullpunkt und mit dem anderem am Pferd befestigt. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter Eigengeschwindigkeit v_s auf dem Band zu laufen (und wird durch die Dehnung des Bandes zusätzlich befördert).

Frage: Wird die Schnecke das Pferd erreichen? Falls ja, wann?

Modellierung: Für den Ort x des Pferdes ergibt sich

$$x(t) = l + tv_p.$$

Für den Ort $y(t)$ der Schnecke ergibt sich das lineare AWP

$$y'(t) = v_s + v_p\frac{y(t)}{x(t)} = v_s + y(t)\frac{v_p}{tv_p + l} \quad \text{mit} \quad x_s(0) = 0.$$

Lösungs-Schritt (1): Wir bestimmen die Lösung der zugehörigen homogenen DGL (äquivalent: $v_s = 0$, die Schnecke bewegt sich nicht selbst) durch Trennung der Variablen:

$$y_h(t) = \mathrm{e}^{\int \frac{v_p}{tv_p+l}dt} = \mathrm{e}^{\ln(tv_p+l)+c_1} = (tv_p + l)\mathrm{e}^{c_1} \quad \text{mit } c_1 \in \mathbb{R}.$$

Wir brauchen nur eine Lösung und wählen dafür $c_1 = 0$. Die entsprechende Lösung $y_h(t) = tv_p + l = x(t)$ hätten wir statt mit Rechnen auch durch inhaltliche Überlegung

erhalten können: Die homogene DGL beschreibt den Transport der Schnecke durch das Gummiband ohne zusätzliche eigene Bewegung und im Fall $y_h(0) = l$ sitzt die Schnecke beim Pferd, woraus $y_h(t) = x(t)$ für alle t folgt.

Lösungs-Schritt (2): Nun lösen wir das inhomogene AWP durch Variation der Konstanten: Der Ansatz $y(t) = c(t)y_h(t)$ führt zu

$$c'(t) = \frac{v_s}{y_h(t)} = \frac{v_s}{tv_p + l},$$

also

$$c(t) = \frac{v_s}{v_p} \ln(tv_p + 1) + c_2 \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R}$$

und

$$y(t) = \frac{v_s}{v_p}(\ln(tv_p + l) + c_2)(tv_p + l).$$

Lösungs-Schritt (3): Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ erfordert $c_2 = -\ln l$. Nach Umstellen erhalten wir

$$y(t) = (tv_p + l)\frac{v_s}{v_p} \ln \frac{tv_p + l}{l}.$$

Zur Ausgangsfrage: Die Schnecke erreicht das Pferd zum Zeitpunkt t, bestimmt durch

$$\begin{aligned} x(t) = y(t) &\Leftrightarrow tv_p + l = (tv_p + l)\frac{v_s}{v_p} \ln \frac{tv_p + l}{l} \\ &\Leftrightarrow \frac{v_p}{v_s} = \ln \frac{tv_p + l}{l} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{l}{v_p}(\mathrm{e}^{\frac{v_p}{v_s}} - 1). \end{aligned}$$

Beispiel 3.6 (Logistische Gleichung)**.** In Umgebungen mit begrenzten Ressourcen stößt das Modell zur Bakterienvermehrung $y'(t) = \alpha y(t)$ mit seinem exponentiellen Wachstum $y(t) = C\mathrm{e}^{\alpha t}$ an Grenzen. Für ein begrenztes Wachstum schlug Pierre-François Verhulst 1838 folgendes Modelll vor:

> Bezeichnet $y_{\max}$ die maximale mögliche Populationsgröße, so geht die *verbleibende Kapazität* $y_{\max} - y(t)$ als Faktor in (3) ein, also
>
> $$y'(t) = \lambda \cdot y(t) \cdot (y_{\max} - y(t)) \tag{18}$$
>
> mit einem gewissen Faktor $\lambda > 0$.

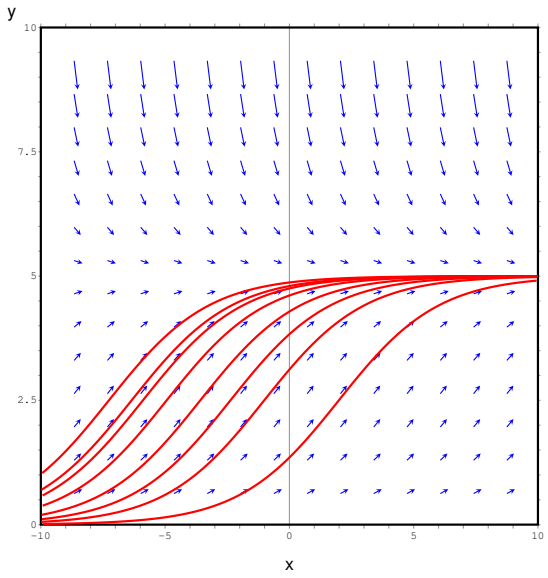


Abbildung 7: Logistisches Wachstum

Diese Gleichung hat zwei *stationäre Lösungen* bzw. *Gleichgewichtspunkte*

$$y_0(t) \equiv 0 \quad \text{und} \quad y_1(t) \equiv y_{\max}.$$

Für alle Startwerte $y_0 \in (0, \infty)$ nähert sich die Lösung erst schneller und dann immer langsamer dem Wert $y_{\max}$ an, vgl. Abbildung 7.

Dieses Modell beschreibt viele Wachstumsprozesse von Populationen und Organismen recht genau, zum Beispiel die Vermehrung von Fruchtfliegen, die Gewichtszunahme bei Ratten, das Höhenwachstum bei Sonnenblumen und viele weitere [Heu06, §1].

In der nächsten Vorlesung sehen wir, wie sich (18) durch eine geschickte Substitution auf eine lineare DGL zurückführen lässt. Zur Übung lösen wir jetzt (18) durch Trennung der Variablen. Satz 2.6 liefert für eine Lösung y mit Startwert

$$y(t_0) = y_0 \in (0, y_{\max}) \tag{19}$$

zunächst

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{z(y_{\max} - z)} = \int_{t_0}^{t} \lambda ds = \lambda(t - t_0). \tag{20}$$

Für das Integral links verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z(y_{\max} - z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{y_{\max} - z},$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$ aus der Gleichung

$$A(y_{\max} - z) + Bz = 1, \quad \text{also } -A + B = 0 \text{ und } Ay_{\max} = 1$$

bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dz}{z(y_{\max}-z)} &= \frac{1}{y_{\max}} \int_{y_0}^{y(t)} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y_{\max}-z}\right) dz \\ &= \frac{1}{y_{\max}} \left[\ln z - \ln(y_{\max}-z)\right]_{z=y_0}^{z=y(t)} \\ &= \frac{1}{y_{\max}} \ln \frac{y(t)(y_{\max}-y_0)}{y_0(y_{\max}-y(t))} \\ &= \frac{1}{y_{\max}} \ln \frac{\alpha y(t)}{y_{\max}-y(t)} \quad \text{mit } \alpha = \frac{y_{\max}-y_0}{y_0} = \frac{y_{\max}}{y_0} - 1,\end{aligned}$$

wobei wir (19) verwendet haben. Einsetzen in (20) liefert

$$\frac{\alpha y(t)}{y_{\max}-y(t)} = \mathrm{e}^{y_{\max}\lambda(t-t_0)}$$

beziehungsweise nach Umstellen

$$y(t) = y_{\max} \frac{\mathrm{e}^{\lambda y_{\max}(t-t_0)}}{\frac{y_{\max}}{y_0} + \mathrm{e}^{\lambda y_{\max}(t-t_0)} - 1}.$$

Insbesondere erkennt man $\lim_{t\to\infty} y(t) = y_{\max}$.

08.11.16

Rückführung von Bernoulli-DGLn auf lineare DGLn

Eine DGL der Form

$$y'(t) + \lambda(t)y(t) + \mu(t)y(t)^\alpha = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha \notin \{0,1\}$$

heißt *Bernoulli-DGL*. Wir nehmen an, dass $y(t) > 0$, multiplizieren mit $(1-\alpha)y(t)^{-\alpha}$ und erhalten

$$\underbrace{(1-\alpha)y'(t)y(t)^{-\alpha}}_{= \frac{d}{dt}\left(y(t)^{1-\alpha}\right)} + (1-\alpha)\lambda(t)y(t)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\mu(t) = 0.$$

Die Substitution $z(t) := y(t)^{1-\alpha}$ führt dann zu der linearen DGL

$$z'(t) + (1-\alpha)\lambda(t)z(t) + (1-\alpha)\mu(t) = 0,$$

die mit Satz 3.3 gelöst werden kann.

Beispiel 3.7 (Logistische Gleichung)**.** Die logistische DGL

$$y'(t) = \lambda \cdot y(t) \cdot (y_{\max} - y(t))$$

kann geschrieben werden als

$$y'(t) - \lambda y_{\max} y(t) + \lambda y(t)^2 = 0.$$

Wir erkennen eine Bernoullische DGL mit $\alpha = 2$ und erhalten wie oben für $z(t) := y(t)^{-1}$ die lineare DGL

$$z'(t) + \lambda y_{\max} z(t) - \lambda = 0.$$

Mit Satz 3.3 erhält man als Lösung

$$z(t) = C\mathrm{e}^{-\lambda y_{\max} t} + \frac{1}{y_{\max}} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

und somit hat jede positive Lösung von (18) die Form

$$y(t) = \frac{1}{C\mathrm{e}^{-\lambda y_{\max} t} + \frac{1}{y_{\max}}} = y_{\max} \frac{\mathrm{e}^{\lambda y_{\max} t}}{\gamma + \mathrm{e}^{\lambda y_{\max} t}} \quad \text{mit geeignetem } \gamma \in \mathbb{R}.$$

4 Existenz und Eindeutigkeit nach Picard-Lindelöf

Die bislang betrachteten Lösungsverfahren für AWPe mit getrennten Variablen und lineare AWP lieferten (in den Sätzen 2.6, Satz 3.2 und 3.3) mit der Darstellung der Lösung durch Integrale insbesondere die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Wir wollen nun die Theorie weiterentwickeln und für ein explizite skalare AWPe 1. Ordnung der Form

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

den sehr nützlichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen von Picard und Lindelöf formulieren und beweisen. Die dazu erforderlichen Voraussetzungen an f (z.B. Stetigkeit) präzisieren wir später.

Grundidee der Fixpunkt-Iteration

Die Grundidee des Satzes von Picard-Lindelöf ist die Anwendung einer *Fixpunkt-Iteration*:

1. Wir schreiben das AWP als Integralgleichung um

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

2. Wir betrachten die Abbildung P, die einer Funktion y die Funktion Py mit

$$(Py)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

zuordnet. Eine Funktion y erfüllt also die obige Integralgleichung genau dann, wenn sie ein genau ein Fixpunkt von P ist, also $Py = y$ gilt.

3. Um einen Fixpunkt von P zu finden, starten wir mit einer Näherung y_1 der Lösung (z.B. $y_1(t) \equiv y_0$) und konstruieren schrittweise (hoffentlich bessere) Näherungen

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds = (P(y_n))(t).$$

Wir hoffen also, dass die durch *Fixpunktiteration* konstruierte Folge

$$y_2 = P(y_1), \qquad y_3 = P(y_2) = P^2(y_1), \qquad \ldots, \qquad y_{n+1} = P^n(y_1), \qquad \ldots$$

gegen einen Fixpunkt y von P konvergiert.

Ähnliche Verfahren benutzt man in der Mathematik öfter.

Beispiel 4.1 (Newton-Verfahren)**.** Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einer unbekannten Nullstelle $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $h'(t_0) \neq 0$. Das Newton-Verfahren zur Bestimmung dieser Nullstelle startet mit einer "Näherung" t_1 und konstruiert dann eine Folge $(t_n)_n$ nach der Vorschrift

$$t_{n+1} = t_n - \frac{h(t_n)}{h'(t_n)} =: N(t_n).$$

Dahinter steckt folgende Idee: Wenn t_n nahe genug bei t_0 war, dann verhält sich h zwischen t_0 und t_n annähernd linear, also

$$0 = h(t_0) \sim h(t_n) + (t_0 - t_n)h'(t_n)$$

beziehungsweise

$$t_0 \sim t_n - \frac{h(t_n)}{h'(t_n)} =: t_{n+1}.$$

Man kann zeigen: Ist t_1 nahe genug bei t_0, so konvergiert die Folge der $t_n = N^{n-1}(t_1)$ für $n \to \infty$ gegen t_0 (ÜA).

Bemerkung. Ein ähnliches Iterationsverfahren verwendet man auch zum Beweis des Umkehrsatzes, wenn man zeigen möchte, dass für eine Abbildung $g\colon U \to V$ mit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$, die stetig differenzierbar ist und deren Ableitung $g'(x_0)$ für ein $x_0 \in U$ invertierbar ist, das Bild $g(U)$ eine Umgebung von $g(x_0)$ enthält.

Vorbereitungen

Die gewünschte Konvergenz der Fixpunkt-Iteration beim Newton-Verfahren und bei Picard-Lindelöf zeigt man mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir wiederholen dafür einige Begriffe:

Definition 4.2.

- *Eine* Norm *auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften: für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

  1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ *(Definitheit),*
  2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ *(Homogenität),*
  3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Subadditivität).*

  Man nennt dann auch $(V, \|\cdot\|)$ einen normierten Raum.

- *Eine* Metrik *auf einer nicht-leeren Menge X ist eine Abbildung $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften: für alle $x, y, z \in X$ gilt*

  1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Definitheit),*
  2. $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie),*
  3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(Dreiecksungleichung).*

  Man nennt dann (X,d) einen metrischen Raum

Für jede Teilmenge D eines normierten Raumes $(V, \|\cdot\|)$ wird durch

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf D definiert.

Definition 4.3. *Sei (X,d) ein metrischer Raum.*

- *Eine* Cauchy-Folge *in (X,d) ist eine Folge $(x_n)_n$ in X mit folgender Eigenschaft:*

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq N : d(x_n, x_m) \leq \epsilon.$$

- *Man nennt (X,d)* vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge $(x_n)_n$ in X gegen einen Grenzwert $x \in X$ konvergiert (d.h. $\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \|x_n - x\| \leq \epsilon$.)*

- *Ein* Banachraum *ist ein normierter Raum, der bezüglich der assoziierten Metrik vollständig ist.*

Satz 4.4. *Der Raum $C([a,b];\mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Operationen*

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t), \qquad (\lambda f)(t) = \lambda f(t)$$

und ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Für jedes Intervall $[c,d]$ ist die Teilmenge $D := C([a,b];[c,d])$ aller stetigen Funktionen $f\colon [a,b]\to[c,d]$ vollständig.

Beweis. Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $C([a,b];[c,d])$. Für jedes $t\in[a,b]$ ist wegen

$$|f_n(t)-f_m(t)| \le \|f_n-f_m\|_\infty$$

auch $(f_n(t))_n$ eine Cauchy-Folge in $[c,d]$ und somit konvergent in $[c,d]$. Wir definieren

$$f\colon [a,b]\to[c,d],\ t\mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Zwischenüberlegung: Sei $\epsilon>0$ gegeben. Dann existiert ein N mit $\|f_n-f_m\|_\infty\le\epsilon/2$ für alle $m,n\ge N$. Es folgt $|f_n(t)-f_m(t)|\le\epsilon/3$ für alle $n,m\ge N$ und $t\in[a,b]$, also

$$|f(t)-f_m(t)|\le\epsilon/3 \text{ für alle } m\ge N,\ t\in[a,b]. \tag{21}$$

Stetigkeit von f: Seien ϵ, N wie oben und $t\in[a,b]$. Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta>0$ mit $|f_N(t)-f_N(t')|<\epsilon/3$ für alle $t'\in[a,b]$ mit $|t-t'|\le\delta$. Für solche t' folgt

$$|f(t)-f(t')|\le|f(t)-f_N(t)|+|f_N(t)-f_N(t')|+|f(t')-f_N(t')|\le\epsilon.$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$: Für ϵ, N wie oben folgt aus (21) $\|f-f_m\|_\infty\le\epsilon/3$ für alle $m\ge N$. □

11.11.16

Der Banachsche Fixpunktsatz ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz 4.5 (Fixpunktsatz von Weissinger)**.** *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, $\sum_n\alpha_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen und $F\colon X\to X$ eine Abbildung mit*

$$d(F^n(x),F^n(y))\le\alpha_n d(x,y)\quad \textit{für alle } x,y\in X.$$

Dann existiert genau ein $x\in X$ mit $F(x)=x$.

Beweis. Zunächst bemerken wir $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Eindeutigkeit: Gilt $F(x)=x$ und $F(y)=y$, so folgt

$$d(x,y)=d(F^n(x),F^n(y))\le\alpha_n d(x,y)\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

also $x=y$.

Existenz: Sei $x_0\in X$ beliebig. Dann bilden die Vektoren $x_n:=F^n(x)$ für $n\in\mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge, denn

$$d(x_{n+1},x_n)=d(F^n(x_1),F^n(x_0))\le\alpha_n d(x_1,x_0)$$

und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) = d(F^n(x_m), F^n(x_0)) &\leq \alpha_n d(x_m, x_0) \\ &\leq \alpha_n (d(x_m, x_{m-1}) + \cdots + d(x_1, x_0)) \\ &\leq \alpha_n \sum_{k=1}^{m} \alpha_k d(x_1, x_0) \leq \alpha_n d(x_1, x_0) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Da (X, d) vollständig ist, konvergiert $(x_n)_n$ gegen ein x. Die Folge $(F(x_n))_n$ konvergiert dann wegen $d(F(x), F(x_n)) \leq \alpha_1 d(x, x_n)$ gegen $F(x)$, aber natürlich auch gegen x, weswegen $x = F(x)$. □

Folgerung 4.6 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $\alpha < 1$ und $F\colon X \to X$ eine Abbildung mit $d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$ für alle $x, y \in X$. Dann existiert genau ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.*

Beweis. Für alle $x, y \in X$ folgt

$$d(F^n(x), F^n(y)) \leq \alpha d(F^{n-1}(x), F^{n-1}(y)) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x, y).$$

Wir setzen $\alpha_n = \alpha^n$, bemerken $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = 1/(1-\alpha)$ (geometrische Reihe) und können somit obigen Satz anwenden. □

Der Satz von Picard-Lindelöf

Nach den Vorbereitungen betrachten wir nun für ein AWP

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

die Folge der Näherungslösungen $y_1, y_2, \ldots$, die aus der Startfunktion $y_1(t) \equiv y_0$ mit Hilfe der Picard-Lindelöf-Iteration nach der Vorschrift

$$y_{n+1}(t) = P(y_n(t)) = y_0 + \int_0^t f(s, y_n(s)) ds$$

für $n \geq 1$ gebildet werden.

Beispiel 4.7. Für das AWP

$$y'(t) = y(t) - t \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

erhalten wir mit der Startfunktion $y_1(t) \equiv 1$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 1 + \int_0^t (1 - s) ds = 1 + t - \frac{t^2}{2}, \\ y_3(t) &= 1 + \int_0^t \left(1 + s - \frac{s^2}{2} - s\right) ds = 1 + \int_0^t \left(1 - \frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t - \frac{t^3}{6}. \end{aligned}$$

Wir können daraus die Form von y_n erraten: für $n = 1, 2, 3$ gilt

$$y_n(t) = 1 + t - \frac{t^n}{n!}. \tag{22}$$

Für $y_{n+1}(t)$ liefert diese Gleichung

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t (y_n(s) - s)ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(1 + s - \frac{s^n}{n!} - s\right) ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(1 - \frac{s^n}{n!}\right) ds \\ &= 1 + t - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Per Induktion folgt also (22) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wie verhält sich $(y_n)_n$ zur tatsächlichen Lösung des AWPs? Das (lineare) AWP hat die Lösung

$$y(t) = t + 1.$$

Der sogenannte Fehler

$$|y_n(t) - y(t)| = \frac{|t|^n}{n!}$$

weist das folgende typische Verhalten auf:

1. für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird der Fehler bei wachsendem t beliebig groß:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t\to\infty} |y_n(t) - y(t)| = \infty;$$

2. für jedes $t \in \mathbb{R}$ wird der Fehler bei wachsendem n beliebig klein:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} |y_n(t) - y(t)| = 0;$$

3. beschränken wir uns auf ein Intervall $[-b, b]$ für ein $b > 0$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left\| y_n|_{[-b,b]} - y|_{[-b,b]} \right\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[-b,b]} \frac{|t|^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0,$$

   das heißt, betrachten wir die Funktionen nur auf dem Intervall $[-b, b]$, so konvergiert $(y_n)_n$ in $C([-b, b], \mathbb{R})$ gegen y bezüglich der Supremumsnorm.

   Untypisch ist, dass dies für *beliebig große* $b > 0$ eintritt; allgemein ist diese Konvergenz nur für *hinreichend kleine Intervalle* um den Startpunkt t_0 (hier 0) zu erwarten.

Nun kommen wir zum zentralen Ergebnis dieses Kapitels:

Satz 4.8 (Picard-Lindelöf)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig und $(t_0, y_0) \in U$. Wir betrachten das AWP*

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \textit{mit} \quad y(t_0) = y_0. \tag{23}$$

Sei

1. *$f(t, y)$ auf U stetig partiell nach y differenzierbar;*
2. *$R := [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck mit $(t_0, y_0) \in R \subseteq U$.*

Setze $M := \sup_{(t,y)\in R} |f(t, y)|$ und $\delta := \min\left\{\frac{y_0-c}{M}, \frac{d-y_0}{M}\right\}$.

Dann existiert auf $[t_0-\delta, t_0+\delta]$ genau eine Lösung y des AWPs (23). Für jede stetige Funktion $y_1\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to [c, d]$ konvergiert die Folge $(y_n)_n$, iterativ definiert durch

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds,$$

gleichmäßig gegen y.

Beweis. Da die partielle Ableitung $\partial_2 f(s, r)$ auf R stetig ist, folgt

$$L := \sup_{(s,r)\in R} |\partial_2 f(s, r)| < \infty.$$

Wir setzen $\delta' := \min\left\{\frac{1}{2L}, \delta\right\}$.

Schritt 1: Wir zeigen zunächst Existenz und Eindeutigkeit der Lösung auf dem Intervall $[t_0 - \delta', t_0 + \delta']$, indem wir den Banachschen Fixpunktsatz auf die Menge

$$X := C([t_0 - \delta', t_0 + \delta']; [c, d])$$

mit der Metrik

$$d(y, z) = \|y - z\|_\infty$$

und die Abbildung P, definiert durch

$$(Py)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

anwenden. Dazu prüfen wir:

- Für $y \in X$ ist Py eine stetige Funktion, da f und y stetig sind, und für $t \in [t_0 - \delta', t_0 + \delta']$ gilt $(Py)(t) \in [c, d]$, weil

  $$|(Py)(t) - y_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right| \leq |t - t_0|M \leq \delta' M \leq \delta M \leq \min\{y_0 - c, d - y_0\}.$$

  Somit ist $Py \in X$. Also ist P als Abbildung von X nach X wohldefiniert.

- Wir zeigen, dass $d(P(y), P(z)) \leq \frac{1}{2} d(y, z)$ für alle $y, z \in X$: Für alle $t \in [t_0 - \delta', t_0 + \delta']$ ist

$$|(Py)(t) - (Pz)(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) - f(s, z(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds$$

und

$$|f(s, y(s)) - f(s, z(s))| = \int_{y(s)}^{z(s)} \partial_2 f(s, r) dr \leq L|y(s) - z(s)| \leq L\|y - z\|_\infty,$$

also

$$|(Py)(t) - (Pz)(t)| \leq |t_0 - t| L \|y - z\|_\infty \leq \frac{L}{2L} \|y - z\|_\infty$$

und somit $d(P(y), P(z)) \leq \frac{1}{2} d(y, z)$.

Somit können wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden und erhalten, dass

- es in X genau einen Fixpunkt von P gibt und
- für jedes $y_1 \in X$ die Folge $(y_n)_n = (P^n(y_1))_n$ gegen einen Fixpunkt y von P konvergiert.

Fixpunkte von P waren aber genau die Lösungen des AWPs. 15.11.16

Schritt 2: Wir nehmen die eindeutige Lösung y aus Schritt 1, wiederholen Schritt 1 für die neuen Startwerte $(t_0 + \delta', y(t_0 + \delta'))$ beziehungsweise $(t_0 - \delta', y(t_0 - \delta'))$ statt (t_0, y_0), und erhalten Existenz und Eindeutigkeit auf dem Intervall $(t_0 - 2\delta', t_0 + 2\delta')$. So vefahren wir immer weiter, bis wir Existenz und Eindeutigkeit auf dem ganzen Intervall $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ erhalten. □

Bemerkung 4.9. Man kann bereits im Schritt 1 Existenz und Eindeutigkeit auf dem gesamten Intervall $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ erhalten, wenn man statt der Supremums-Norm die *Morgenstern-Norm*

$$\|y\| := \sup_{t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]} |y(t) \mathrm{e}^{-\alpha t}|$$

für ein geeignetes $\alpha > 0$ verwendet.

Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Das *Langzeitverhalten* von Lösungen eines AWPs kann sehr unterschiedlich vom Anfangswert abhängen:

Beispiel 4.10. 1. Für das AWP

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \lambda > 0$$

ist die Lösung $t \mapsto y_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$ im Fall $y_0 = 0$ konstant 0, während sie für *jedes* $y_0 > 0$ beliebig groß wird.

2. Für die logistische DGL $y'(t) = \lambda y(t)(y_{\max} - y(t))$ sahen wir hingegen, dass für jedes $y_0 \in (0, y_{\max})$ hingegen die Lösung für $t \to \infty$ gegen $y_{\max}$ geht (s. Beispiel 3.6).

Über *begrenzte Zeiträume* hingegen hängen die Lösung eines AWPs

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

unter einfachen Annahmen an f *stetig* vom Startwert y_0 ab. Das wollen wir jetzt zeigen; dazu benötigen wir verschiedene Abschätzungen. Wir beginnen mit einer einfachen Differenzial-Ungleichung:

Lemma 4.11. *Sei $\psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf (a,b) differenzierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\psi'(t) \le \lambda\psi(t)$ für alle $t \in (a,b)$. Dann folgt $\psi(t) \le \psi(a)e^{\lambda(t-a)}$ für alle $t \in [a,b]$.*

Beweis. Die Funktion $\omega(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{\lambda(a-t)}$ erfüllt

$$\omega'(t) = \mathrm{e}^{\lambda(a-t)}(\psi'(t) - \lambda\psi(t)) \le 0$$

und somit für alle $t \in [a,b]$

$$\psi(t)\mathrm{e}^{\lambda(a-t)} = \omega(t) \le \omega(a) = \psi(a). \qquad \square$$

Dies können wir auf eine Integral-Ungleichung anwenden:

Lemma 4.12 (Gronwall-Lemma)**.** *Sei $\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, seien $L, C > 0$ und*

$$0 \le \phi(t) \le C + L\int_a^t \phi(s)ds \quad \textit{für alle } t \in [a,b].$$

Dann gilt

$$\phi(t) \le Ce^{L(t-a)} \quad \textit{für alle } t \in [a,b].$$

Beweis. Die Funktion $\psi(t) := C + L\int_a^t \phi(s)ds$ erfüllt

$$0 \le \phi(t) \le \psi(t) \quad \text{und} \quad \psi'(t) = L\phi(t) \le L\psi(t).$$

Mit dem vorigen Lemma folgt

$$\phi(t) \le \psi(t) \le \psi(a)\mathrm{e}^{L(t-a)} = C\mathrm{e}^{L(t-a)}. \qquad \square$$

Satz 4.13 (Stetige Abhängigkeit von Anfangswerten)**.** *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, $R = [a,b] \times [c,d]$ enthalten in U und $y, \tilde{y}\colon [a,b] \to [c,d]$ Lösungen der DGL $z'(t) = f(t, z(t))$. Dann gilt*

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \le |y(a) - \tilde{y}(a)|e^{L(t-a)} \textit{ für alle } t \in [a,b].$$

Beweis. Die Funktion $\phi(t) := |y(t) - \tilde{y}(t)|$ erfüllt

$$\begin{aligned}
\phi(t) = |y(t) - \tilde{y}(t)| &= \left| \left(y(a) + \int_a^t y'(s)ds \right) + \left(\tilde{y}(a) + \int_a^t \tilde{y}'(s)ds \right) \right| \\
&\leq |y(a) - \tilde{y}(a)| + \int_a^t |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))|ds \\
&= \phi(a) + \int_a^t \int_{y(s)}^{\tilde{y}(s)} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(s, z) \right| dzds \\
&\leq \phi(a) + \int_a^t L|y(s) - \tilde{y}(s)|ds \\
&\leq \phi(a) + L \int_a^t \phi(s)ds.
\end{aligned}$$

Das Gronwall-Lemma liefert nun die gewünschte Ungleichung. □

5 Numerische Verfahren

Wir betrachten nun Verfahren zur Approximation der Lösung eines AWPs

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0 \tag{24}$$

auf einem fest gewählten Intervall $[t_0, b]$.

Fehlerverhalten des Euler-Verfahrens

Zuerst erinnern wir uns an das *Eulersche Polygonzugverfahren* (s. Kapitel 2):

- Das Intervall $[t_0, b]$ wird in n Teilintervalle der Länge $h = \frac{b-t_0}{n}$ zerlegt.
- In den Stützstellen $t_k = t_0 + h$, $t_2 = t_0 + 2h$, …, $t_n = t_0 + nh = b$ wird schrittweise eine Näherungslösung $\tilde{y}_k$ berechnet gemäß

$$\tilde{y}_0 := y_0 \quad \text{und} \quad \tilde{y}_{k+1} := \tilde{y}_k + hf(t_k, \tilde{y}_k) \text{ für } k = 0, \ldots, n-1. \tag{25}$$

18.11.16

Satz 5.1 (Fehler des Eulerschen Polygonzugverfahrens)**.** *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, $(t_0, y_0) \in U$ und $y\colon [t_0, b] \to [c, d]$ eine Lösung des AWP* (24)*, wobei $R := [t_0, b] \times [c, d] \subseteq U$. Seien $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ definiert durch* (25)*. Setze*

$$C := \sup_{t \in [t_0, b]} |y''(t)| \quad \textit{und} \quad L := \sup_{(t,z) \in R} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(t, z) \right|.$$

Dann gilt

$$|y(b) - \tilde{y}_n| \leq \frac{(b - t_0)C}{2Ln} (e^{L(b-t_0)} - 1).$$

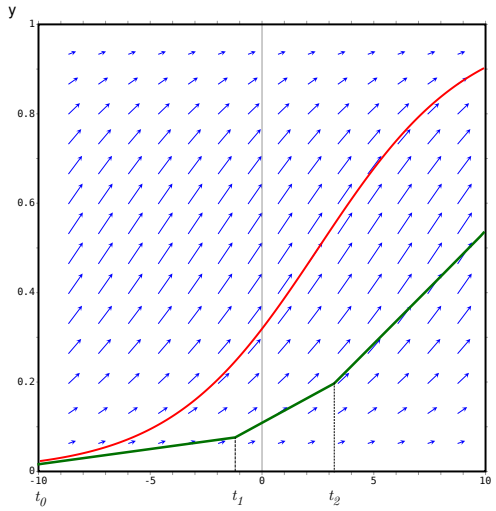


Abbildung 8: Näherungslösung (grün) nach Eulerschem Polygonzugverfahren

Bemerkung 5.2.

1. In der Abschätzung taucht auf der rechten Seite n nur einmal im Nenner auf, alle anderen auftretenden Terme sind von n unabhängig. Insbesondere folgt, dass für $n \to \infty$ die Näherungslösung $\tilde{y}$ punktweise gegen y konvergiert.
2. Zur Halbierung des Fehlers etwarten wir, dass etwa eine Verdoppelung von n (und somit des Rechenaufwandes) nötig ist.
3. Der Fehler wächst in etwa exponentiell mit dem Abstand zum Startpunkt t_0, ähnlich wie bei der Abschätzung zur Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert.

Beweis von Satz 5.1. Wir untersuchen den Fehler

$$\epsilon_k := |\tilde{y}_k - y(t_k)|.$$

Lokaler Fehler: Wie groß ist der Fehler nach einem Schritt? Die *Taylor-Formel* (s. Satz 5.3) liefert

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) = y(t_k + h) &= y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [t_k, t_{k+1}] \\ &= y(t_k) + hf(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi). \end{aligned}$$

Ziehen wir das von (25) ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\epsilon_{k+1} = |\tilde{y}_{k+1} - y(t_{k+1})| &\leq |\tilde{y}_k - y(t_k)| + h \underbrace{|f(t_k, \tilde{y}_k) - f(t_k, y(t_k))|}_{\leq L|\tilde{y}_k - y(t_k)|} + \frac{h^2}{2}C \\ &\leq \epsilon_k + h\epsilon_k L + \frac{h^2}{2}C \\ &= \epsilon_k(1 + hL) + \frac{h^2}{2}C.\end{aligned}$$

Globaler Fehler: Aus obiger Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}|y(b) - \tilde{y}_n| = \epsilon_n &\leq \frac{h^2}{2}C + (1 + hL)\epsilon_{n-1} \\ &\leq \frac{h^2}{2}C + (1 + hL)\left(\frac{h^2}{2}C + (1 + hL))\epsilon_{n-2}\right) \\ &\vdots \\ &\leq \frac{h^2}{2}C\sum_{k=0}^{n-1}(1 + hL)^k.\end{aligned}$$

Wir erkennen die geometrische Reihe und folgern

$$|y(b) - \tilde{y}_n| \leq \frac{h^2}{2}C\frac{(1 + hL)^n - 1}{hL} = \frac{hC}{2L}\left((1 + hL)^n - 1\right).$$

Wir setzen $h = \frac{b-t_0}{n}$ ein und erhalten unter Verwendung der Abschätzung

$$(1 + hL)^n = \left(1 + \frac{L(b - t_0)}{n}\right)^n \nearrow \mathrm{e}^{L(b-t_0)} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

die behauptete Ungleichung

$$|y(b) - \tilde{y}(b)| \leq \frac{(b - t_0)C}{2Ln}(\mathrm{e}^{L(b-t_0)} - 1).$$

□

Runge-Kutta-Verfahren

Näherungsverfahren mit besserem Konvergenzverhalten kann man erhalten, indem man die Lösung auf jedem der Teilintervalle $[t_k, t_{k+1}]$ nicht wie beim Euler-Verfahren linear gemäß

$$y(t_k + h) \sim y(t_k) + hy'(t_k) = y(t_k) + hf(t_k, y(t_k))$$

approximiert, sondern quadratisch/kubisch/..., also durch höhere Taylor-Polynome. Zur Wiederholung:

Satz 5.3 (Taylor-Entwicklung)**.** *Sei $y\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar und seien $t, t+h \in (a,b)$. Dann gilt*

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t) + \underbrace{\int_t^{t+h} \frac{(t+h-s)^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(s)ds}_{=:R}.$$

Beweis. Induktion nach n: Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung liefert

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} y'(s)ds.$$

Partielle Integration mit $u = -((t+h)-s)$ und $v = y'(s)$ liefert

$$y(t+h) = y(t) + \underbrace{[(s-t-h)y'(s)]_{s=t}^{s=t+h}}_{=hy'(t)} + \int_t^{t+h} (t+h-s)y''(s)ds.$$

Partielle Integration mit $u = -\frac{1}{2}(t+h-s)^2$ und $v = y''(s)$ liefert

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \int_t^{t+h} \frac{1}{2}(t+h-s)^2 y'''(s)ds.$$

Fortlaufendes partielles Integrieren liefert die Behauptung. □

Bemerkung 5.4. Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung kann man zeigen:

$$\exists \xi \in (t, t+h) : R = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi).$$

Will man also $y(t_k + h)$ durch ein Taylor-Polynom approximieren, benötigt man die höheren Ableitungen

$$\begin{aligned} y'(t_k) &= f(t, y(t_k)), \\ y''(t_k) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_k} f(t, y(t)) \\ &= \partial_1 f(t_k, y(t_k)) + y'(t_k)\partial_2 f(t_k, y(t_k)) \\ &= \partial_1 f(t_k, y(t_k)) + f(t_k, y(t_k))\partial_2 f(t_k, y(t_k)), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{26}$$

Alle höheren Ableitungen von y kann man mit Hilfe von f und (höheren) partiellen Ableitungen von f im Punkt $(t_k, y(t_k))$ ausdrücken.

Hat man aber nur Zugriff auf f und nicht auf die partiellen Ableitungen von f, so kann man dennoch die Lösung durch das Taylor-Polynom d-ter Ordnung approximieren, indem man f nicht nur in $(t_k, y(t_k))$ berechnet, sondern in d geeigneten Stützstellen

$$t_k + c_1 h, \ldots, t_k + c_d h \in [t_k, t_{k+1}] \quad \text{mit } c_1, \ldots, c_d \in [0,1]$$

gewisse Näherungen $v_{k,i}$ von $y'(t_k + c_i h)$.

Allgemein wird ein *Runge-Kutta-Näherungsverfahren* beschrieben durch eine Koeffizienten-Matrix (*Butcher-Schema*)

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_d & a_{d1} & \cdots & \cdots & a_{d(d-1)} \\ \hline & b_1 & \cdots & \cdots & b_{d-1} \quad b_d \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} a_{i1} + \cdots + a_{i(i-1)} = c_i & \text{für jedes } i, \\ b_1 + \cdots + b_d = 1 \end{cases}$$

und berechnet, beginnend mit $\tilde{y}_0 = y_0$, jeweils Näherungen $\tilde{y}_k$ von $y(t_k)$ gemäß

$$\begin{aligned} v_{k,i} &= f\left(t + c_i h, \tilde{y}_k + h(a_{i1} v_{k,1} + \cdots + a_{i(i-1)} v_{k,i-1})\right) \text{ für } i = 1, \ldots, d, \\ \tilde{y}_{k+1} &= \tilde{y}_k + h(b_1 v_{k,1} + \cdots + b_d v_{k,d}). \end{aligned}$$

22.11.16

Beispiel 5.5 (Heun-Verfahren)**.** Wir betrachten das Runge-Kutta-Verfahren zum Koeffizienten-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Hier wird

$$v_{k,1} = f(t_k, \tilde{y}_k), \quad v_{k,2} = f(t_k + h, \tilde{y}_k + h v_{k,1}), \quad \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \frac{1}{2} v_{k,1} + \frac{1}{2} v_{k,2}.$$

Im Gegensatz zum Eulerverfahren wird zur Berechnung von $\tilde{y}_{k+1}$ also nicht nury der Anstieg $f(t_k, \tilde{y}_k)$ verwendet, sondern zusätzlich der Anstieg der Näherungslösung im nächsten Punkt $(t_k, \tilde{y}_k + h f(t_k, \tilde{y}_k))$ des Eulerverfahrens berechnet und dann der Mittelwert gebildet.

Wir wollen zeigen, dass dieses Verfahren einer *quadratischen Approximation* der Lösung auf jedem Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$ entspricht und der lokale Fehler von der Größenordnung h^3 ist. Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung von f sehen wir:

$$\begin{aligned} v_{k,1} &= f(t_k, \tilde{y}_k), \\ v_{k,2} &= f(t_k, \tilde{y}_k) + h \partial_1 f(t_k, \tilde{y}_k) + h v_{k,1} \partial_2 f(t_k, \tilde{y}_k) + o(h^2), \end{aligned}$$

wobei $o(h^2)$ einen Rest der Größenordnung h^2 bezeichnet. Zusammengefasst erhalten wir

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + h f(t_k, \tilde{y}_k) + \frac{h^2}{2}(\partial_1 f(t_k, \tilde{y}_k) + f(t_k, \tilde{y}_k) \partial_2 f(t_k, \tilde{y}_k)) + \underbrace{h o(h^2)}_{o(h^3)}.$$

Im Fall $\tilde{y}_k = y(t_k)$ weicht dieser Ausdruck von

$$y(t_{k+1}) = y(t_k + h) = y(t_k) + hy'(t_k) + \frac{h^2}{2}y''(t_k) + o(h^3)$$

wegen (26) nur um einen Fehler der Größenordnung $o(h^3)$ ab. Für den globalen Fehler an der Stelle b unter Verwendung von n Stützstellen $t_1, \dots, t_n$ erhält man eine Abschätzung mit n^2 statt n im Nenner.

Im Vergleich zum Euler-Verfahren müssen wir hier die Funktion f nicht nur n Mal an den Stützstellen $t_0, \dots, t_{n-1}$ auswerten, sondern $2n$ Mal. Aber wenn wir n verzehnfachen, können wir beim Euler-Verfahren nur mit einer Verkleinerung des Fehlers um den Faktor 10 rechnen, bei diesem Verfahren dagegen mit einer Verkleinerung um den Faktor 100.

Beispiel 5.6. Runge-Kutta-Verfahren mit lokalem Fehler der Ordnung 3, 4 bzw. 5 erhält man für folgende Koeffizienten-Matrizen:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

6 Exakte Differenzialgleichungen

Vorüberlegungen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $F\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann können wir zu jedem $c \in \mathbb{R}$ die *Niveaumenge*

$$F^{-1}(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = c\}$$

betrachten. In jedem Punkt $(x_0, y_0) \in U$ mit $DF(x_0, y_0) \neq 0$ steht dann der Gradient

$$\operatorname{grad} F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 F(x_0, y_0) \\ \partial_2 F(x_0, y_0) \end{pmatrix} = ((DF)(x_0, y_0))^\top$$

senkrecht zu der entsprechenden Niveaumenge für $c = F(x, y)$; genauer:

Lemma 6.1. *Sei $g\colon (\alpha, \beta) \to U$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$F \circ g \text{ ist konstant} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{grad} F(g(t)) \perp g'(t) \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta). \tag{27}$$

Beweis. Nach Kettenregel gilt aber

$$\begin{aligned}(F \circ g)'(t) &= (DF)(g(t))g'(t) \\ &= (\partial_1 F)(g(t))g_1'(t) + (\partial_2 F)(g(t))g_2'(t) = \langle \operatorname{grad} F(g(t)) \mid g'(t) \rangle.\end{aligned}$$

Die beiden Bedingungen im Lemma sind dann äquivalent dazu, dass dieser Ausdruck für alle $t \in (\alpha, b)$ gleich Null ist. □

Beispiel 6.2. Im Fall $F(x,y) = x^2 + y^2$ ist

- für jedes $c \geq 0$ die Niveaumenge $F^{-1}(c)$ der Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\sqrt{c}$;
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \sqrt{c}(\cos t, \sin t)$ eine Kurve, die in der Niveaumenge zu $c \geq 0$ verläuft;
- $\operatorname{grad} F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ und $g'(t) = \sqrt{c}(-\sin t, \cos t)$ sowie $\operatorname{grad} F(g(t)) = 2g(t) = 2\sqrt{c}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Die Form exakter DGLn

Was haben obige Überlegungen mit DGLn zu tun? Für eine Kurve der Form

$$g(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}$$

wird $g_1'(t) = 1$, $g_2'(t) = y'(t)$ und (27) ist dann äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_1 F(t, y(t)) \\ \partial_2 F(t, y(t)) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} t \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= (\partial_1 F)(t, y(t)) + (\partial_2 F)(t, y(t)) y'(t) \quad \text{für alle } t \in (\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Differenziagleichungen dieser Form sind besonders wichtig und Inhalt dieses Kapitels:

Definition 6.3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und seien $P, Q\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Eine DGL der Form*

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t)) y'(t) = 0 \tag{28}$$

heißt exakt (auf U)*, falls es eine stetig differenzierbare Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ gibt, für die*

$$P = \partial_1 F \quad \textit{und} \quad Q = \partial_2 F \tag{29}$$

gilt. Wir nennen dann F ein Potential *von (P, Q).*

Lösungen einer solchen exakten DGL verlaufen immer in Niveaumengen von F:

Satz 6.4. *Sei eine exakte DGL wie in Definition 6.3 gegeben.*

1. *Ist F ein Potential von (P, Q), so gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $y\colon (\alpha, \beta) \to U$:*

$$y \textit{ löst } (28) \quad \Leftrightarrow \quad F(t, y(t)) \textit{ ist konstant.}$$

Sei ferner $(t_0, y_0) \in U$ und $Q(t_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

2. *Es gibt eine stetig differenzierbare Lösung* $y\colon (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ *der DGL* (28) *mit* $y(t_0) = y_0$.

3. *Ist* $z\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ *eine stetig differenzierbare Lösung der DGL mit* $z(t_0) = y_0$*, so stimmt* z *auf* $(t_0-\delta, t_0+\delta) \cap (\alpha, \beta)$ *mit* y *überein.*

Beweis. 1. Unsere Vorüberlegungen zeigten:

$$F(t, y(t)) \text{ ist konstant} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{d}{dt} F(t, y(t))}_{\partial_1 F(t,y(t)) + \partial_2 F(t,y(t)) y'(t)} = 0 \text{ für alle } t.$$

2. Die Gleichung $F(t, y) = 0$ kann nach dem Satz über implizite Funktionen wegen $\partial_2 F(t_0, y_0) = Q(t_0, y_0) \neq 0$ lokal um t_0 aufgelöst werden, d.h. es gibt eine $\delta > 0$ und ein stetig differenzierbare Funktion $y\colon (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}$ mit $F(t, y(t)) = F(t_0, y_0)$ für alle $t \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Man sieht mit 1. oder nach Differenzieren der letzten Gleichung nach t, dass dieses y die DGL löst.

3. Diese Aussage folgt aus dem Satz über implizite Funktionen ähnlich wie 2. □

25.11.16

Beispiel 6.5. 1. Die DGL

$$2t + 2y(t)'y(t) = 0$$

ist exakt und ein Potential ist gegeben durch $F(t, y) = t^2 + y^2$, denn $\partial_1 F(t, y(t)) = 2t$ und $\partial_2 F(t, y(t)) = 2y(t)$. Auflösung von $F(t, y) = c$ nach y ergibt die Lösungen

$$y(t) = \pm\sqrt{c - t^2} \quad \text{für alle } t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}).$$

Für einen gegebenen Anfangswert (t_0, y_0) ist $c = F(t_0, y_0) = t_0^2 + y_0^2$ zu setzen und das Vorzeichen von y gleich dem von y_0 zu wählen.

Die Integrabilitätsbedingungen

Zur Lösung einer exakten DGL ergeben sich nun zwei Fragen: *Wie kann man*

1. *an* P *und* Q *ablesen, ob die DGL*

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y'(t) = 0 \tag{30}$$

exakt ist?

2. *im positiven Fall ein Potential* F *von* (P, Q) *bestimmen?*

Satz 6.6. *Seien* $P, Q\colon U \to \mathbb{R}$ *stetig partiell differenzierbar und die DGL* (30) *exakt auf* U*. Dann gelten die* Integrabilitätsbedingungen

$$\partial_2 P(t, y) = \partial_1 Q(t, y) \quad \textit{für alle } (t, y) \in U.$$

In dem Fall gilt für jede (stückweise) stetig differenzierbare Kurve $g\colon [\alpha,\beta] \to U$ und jedes Potential F von (P,Q):

$$F(g(\beta)) = F(g(\alpha)) + \int_\alpha^\beta \big(P(g(s))g_1'(s) + Q(g(s))g_2'(s)\big)\,ds. \tag{31}$$

Insbesondere ist F bis auf eine additive Konstante eindeutig durch (P,Q) bestimmt.

Beweis. Ist $F\colon U \to \mathbb{R}$ ein Potential von (P,Q), so sind

$$\partial_2 P(t,y) = \partial_2\partial_1 F(t,y) \quad \text{und} \quad \partial_1 Q(t,y) = \partial_1\partial_2 F(t,y)$$

gleich nach dem Satz von Schwarz aus der Analysis 2. Ferner gilt (vgl. Beweis von Lemma 6.1)

$$\begin{aligned} F(g(\beta)) &= F(g(\alpha)) + \int_\alpha^\beta (F\circ g)'(s)ds \\ &= F(g(\alpha)) + \int_\alpha^\beta \underbrace{(\partial_1 F)}_{=P}(g(s))g_1'(s) + \underbrace{(\partial_2 F)}_{=Q}(g(s))g_2'(s)ds.. \end{aligned}$$ □

Wir zeigen nun gleich, dass auch die Umkehrung stimmt, und verwenden (31) als Hinweis darauf, wie man ein Potential F mit Hilfe von P und Q definieren kann.

Satz 6.7. *Sei $U = (a,b)\times(c,d) \subseteq \mathbb{R}^2$ (ein offenes Rechteck), $(t_0,y_0) \in U$ und seien $P,Q\colon U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar mit $\partial_2 P = \partial_1 Q$. Dann ist die DGL*

$$P(t,y(t)) + Q(t,y(t))y'(t) = 0$$

exakt und ein Potential F für (P,Q) ist gegeben durch

$$F(t,y) = \int_{t_0}^t P(s,y_0)ds + \int_{y_0}^y Q(t,z)dz.$$

Zum Beweis müssen wir unter einem Integralzeichen differenzieren.

Lemma 6.8. *Sei $h\colon (a,b)\times[c,d] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $H(t) = \int_c^d h(t,z)dz$ für alle $t \in (a,b)$. Dann ist H stetig differenzierbar und $H'(t) = \int_c^d \partial_1 h(t,z)dz$.*

Beweis. Siehe z.B. [Kön93, §2.6]. □

Beweis von Satz 6.7. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und dem vorigen Lemma gilt

$$\partial_1 F(t,y) = P(t,y_0) + \int_{y_0}^y \underbrace{\partial_1 Q(t,z)}_{=\partial_2 P(t,z)}\,dz = P(t,y_0) + [P(t,z)]_{z=y_0}^{z=y} = P(t,y)$$

und $\partial_2 F(t,y) = Q(t,y)$. □

Bemerkung 6.9. 1. Zur Berechnung eines Potentials nach der obigen Formel kann der Punkt $(t_0, y_0) \in U$ beliebig gewählt werden; je nach Wahl können die Integrale einfacher oder schwerer zu berechnen sein.

2. Bei fest gewähltem $(t_0, y_0) \in U$ kann zur Berechnung des Potentiales $F(t, y)$ die Kurve g, entlang derer integriert wird, nach Satz 6.6 beliebig gewählt werden; auch dadurch kann sich die Berechnung der Integrale vereinfachen oder erschweren.

3. Die Gleichung $\partial_2 P = \partial_1 Q$ heißt *Integrabilitätsbedingung*.

Beispiel 6.10. Die DGL

$$3t^2(y(t)^2 + 1) + 2t^3 y(t) y'(t) = 0$$

ist exakt auf ganz $\mathbb{R}^2$: schreiben wir sie in der Form

$$P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y'(t) = 0 \quad \text{mit} \quad P(t, y) = 3t^2(y^2 + 1) \text{ und } Q(t, y) = 2t^3 y,$$

so sehen wir

$$\partial_2 P(t, y) = 6t^2 y = \partial_1 Q(t, y).$$

Wir berechnen ein Potential mit Satz 6.7 mit dem Startpunkt $(0, 0)$:

$$F(t, y) = \int_0^t P(s, 0)ds + \int_0^y Q(t, z)dz = \int_0^t 3s^2 ds + \int_0^y 2t^3 z dz = t^3 + t^3 y^2 = t^3(y^2 + 1).$$

Zur Probe (besonders in einer Klausur) bietet es sich an, nach der Berechnung von F noch einmal die Gleichungen $\partial_1 F = P$ und $\partial_2 F = Q$ zu überprüfen.

Nach Satz 6.6 können wir $F(t, y)$ auch berechnen, indem wir entlang einer anderen Kurve integrieren, z.B. entlang von

$$g\colon [0, t + y] \to \mathbb{R}^2, \quad s \mapsto \begin{cases} (0, s) & 0 \le s \le y, \\ (s - y, y), & y \le s \le t + y. \end{cases}$$

Diese Kurve ist auf $(0, y)$ und $(y, t + y)$ stetig differenzierbar mit

$$g_1'(s) = \begin{cases} 0, & 0 < s < y, \\ 1, & y < s < t + y, \end{cases} \qquad g_2'(s) = \begin{cases} 1, & 0 < s < y, \\ 0, & y < s < t + y. \end{cases}$$

Nach Satz 6.6 folgt wegen $F(t_0, y_0) = 0$

$$F(t, y) = \int_0^{t+y} \big(P(g(s))g_1'(s) + Q(g(s))g_2'(s)\big)\, ds = \int_y^{t+y} P(s - y, y)ds + \int_0^y Q(0, s)ds.$$

Setzen wir P und Q ein, so fällt wegen $Q(0, s) = 0$ das zweite Integral weg und wir erhalten

$$F(t, y) = \int_0^t 3s^2(y^2 + 1)ds = \big[s^3(y^2 + 1)\big]_{s=0}^{s=t} = t^3(y^2 + 1).$$

Aus $F(t,y) = c$ folgt dann $y = \sqrt{ct^{-3} - 1}$. Die allgemeine Lösung der DGL ist also von der Form

$$y(t) = \sqrt{ct^{-3} - 1}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ und diese Lösung existiert im Fall $c > 0$ nur für $0 < t \leq \sqrt[3]{c}$, im Fall $c < 0$ nur für $\sqrt[3]{-c} \leq t < 0$.

Als nächste Anwendung betrachten wir Differenzialgleichungen mit getrennten Variablen:

Beispiel 6.11. Wir betrachten ein AWP der Form

$$y'(t) = \frac{g(t)}{h(y(t))} \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0,$$

wobei $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ und $h\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind, $(t_0, y_0) \in U := (a,b) \times (c,d)$ und $h(z) \neq 0$ für alle $z \in (c,d)$.

Schreiben wir die DGL in der äuivalenten Form

$$0 = g(t) - h(y(t))y'(t) = P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y'(t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} P(t,z) = g(t), \\ Q(t,z) = -h(z), \end{cases}$$

so erhalten wir eine exakte DGL, weil

$$\partial_2 P(t,z) = 0 = \partial_1 Q(t,z)$$

für alle $(t,z) \in U$. Ein Potential ist nach dem vorigen Satz gegeben durch

$$F(t,y) = \int_{t_0}^{t} P(s, y_0)ds + \int_{y_0}^{y} Q(t,z)dz = \underbrace{\int_{t_0}^{t} g(s)ds}_{=:G(t)} - \underbrace{\int_{y_0}^{y} h(z)dz}_{=:H(y)}.$$

Eine Lösung des AWP erhält man also durch Auflösung der Gleichung

$$G(t) - H(y) = F(t, y(t)) = F(t_0, y_0) = 0, \quad \text{also} \quad G(t) = H(y),$$

nach y, genau wie im Satz zur Trennung der Variablen 2.6.

Teil II
DGL-Systeme erster Ordnung

7 Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung — Vorbemerkungen

Wir gehen nun von skalaren DGL 1. Ordnung über zu Systemen von expliziten DGLn erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), \dots, y_n(t)), \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Wir fassen die Funktionen y_i und f_i zu vektor-wertigen Funktionen

$$\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{y} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{R}^{n+1} \ni (t, z_1, \dots, z_n) \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} f_1(t, z_1, \dots, z_n) \\ \vdots \\ f_n(t, z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

zusammen und schreiben dann das System kompakt als vektorwertige DGL:

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Eine Anfangsbedingung hat dann die Form $y(t_0) = y_0$ mit $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Vom skalaren Fall kann man dann recht einfach übertragen:

- den Satz von Picard-Lindelöf 4.8 über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWPs auf einer gewissen Umgebung $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ von t_0 unter der Annahme, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist;
- den Satz 4.13 über die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert y_0 im Fall, dass f zweimal stetig partiell differenzierbar ist ;
- das Eulersche Polygonzugverfahren zur Approximation der Lösung y des AWPs in vorgegebenen Stützpunkten $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ gemäß

  $$\begin{aligned} y(t_0) = y_0 =: \tilde{y}_0, \qquad y(t_{k+1}) &\sim y(t_k) + (t_{k+1} - t_k) y'(t_k) \\ &\sim \tilde{y}_k + (t_{k+1} - t_k) f(t_k, \tilde{y}_k) =: \tilde{y}_{k+1} \quad \text{für } k \geq 0; \end{aligned}$$

  und die Runge-Kutta-Verfahren aus Kapitel 5.

Wir betrachten in den nächsten Vorlesungen nacheinander

- *autonome DGL-Systeme* der Form $y'(t) = f(y(t))$;
- *lineare DGL-Systeme* der Form $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$;
- *DGLn höherer Ordnung*, die wir auf Systeme 1. Ordnung zurückführen.

8 Autonome Systeme von Differenzialgleichungen

Grundbegriffe

Beginnen wir mit Begriffsbestimmungen:

Definition 8.1. *Ein (stetiges/differenzierbares)* Vektorfeld *auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine (stetige/differenzierbare) Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Ein* autonomes DGL-System *ist ein DGL-System der Form*

$$y'(t) = f(y(t)) \tag{32}$$

für ein Vektorfeld $f\colon U \to \mathbb{R}^n$. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $y\colon I \to U$ eine Lösung dieses DGL-Systems, so nennt man das Bild $y(I) \subseteq U$ die Trajektorie *von y.*

Wir konzentrieren uns zunächst auf den Fall $n = 2$ und schreiben dann (32) meist in der Form

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(x(t), y(t)), \\ y'(t) &= h(x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{33}$$

Solch ein DGL-System kann man gut veranschaulichen, indem man in Gitterpunkten der Ebene das Vektorfeld einzeichnet. Zeichnet man die Trajektorien von Lösungen ein, so spricht man von einem *Phasenportrait*. Diese Trajektorien verlaufen tangential zum Vektorfeld.

Beispiel 8.2. Für das DGL-System

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}$$

zeigt Abbildung 9 das Richtungsfeld. Lösungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos(t), \\ y(t) &= r\sin(t), \end{aligned}$$

verlaufen also auf Kreisen um den Ursprung. Abbildung 10 zeigt das Phasenportrait.

Beispiel 8.3. Eine skalares, explizites AWP 1. Ordnung der Form

$$y'(t) = h(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

können wir auch als autonomes AWP mit zwei Variablen $y(t)$ und $x(t) = t$ auffassen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1, & x(t_0) &= t_0, \\ y'(t) &= h(x(t), y(t)), & y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Lösungen dieses Systems sind genau die Paare (x, y) mit $x(t) = t$ und $y'(t) = h(t, y(t))$.

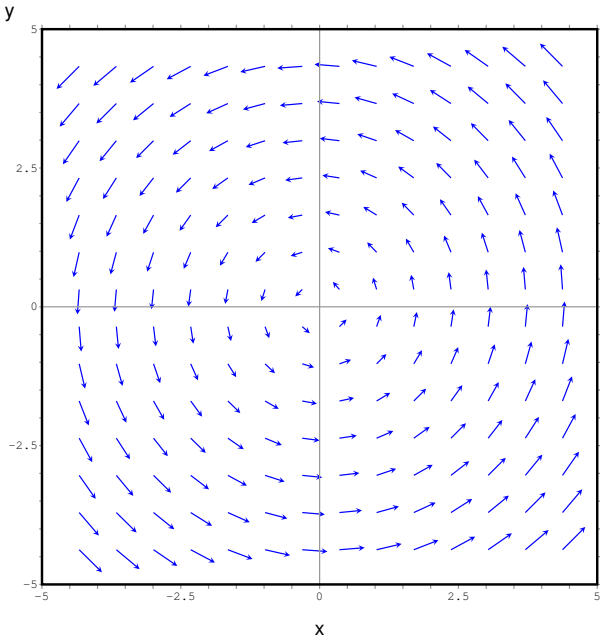


Abbildung 9: Richtungsfeld zu $x'(t) = -y(t)$, $y'(t) = x(t)$

Wir knüpfen nun an die geometrischen Überlegungen zu exakten Differenzialgleichungen an.

Definition 8.4. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Eine differenzierbare Funktion $F\colon U \to \mathbb{R}$ heißt*

- Hamilton-Funktion *für* (33)*, falls F ein Potential von $(-h, g)$ ist, also*

$$\partial_1 F = -h \quad \text{und} \quad \partial_2 F = g;$$

- erstes Integral *für* (33)*, falls*

$$(\partial_1 F)(x,y)g(x,y) + (\partial_2 F)(x,y)h(x,y) = 0 \quad \text{für alle } (x,y) \in U.$$

Beispiel 8.5. In Beispiel 8.2 ist $F(x,y) := -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ eine Hamilton-Funktion.

Satz 8.6. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $g, h\colon U \to \mathbb{R}$ stetig.*

1. *Jede Hamilton-Funktion für* (33) *ist ein erstes Integral.*
2. *Ist F ein erstes Integral für* (33) *und (x,y) eine Lösung von* (33)*, so ist $F(x(t), y(t))$ konstant (unabhängig von t).*

Beweis. Einfache ÜA; vgl. Satz 6.4, Aussage 1. □

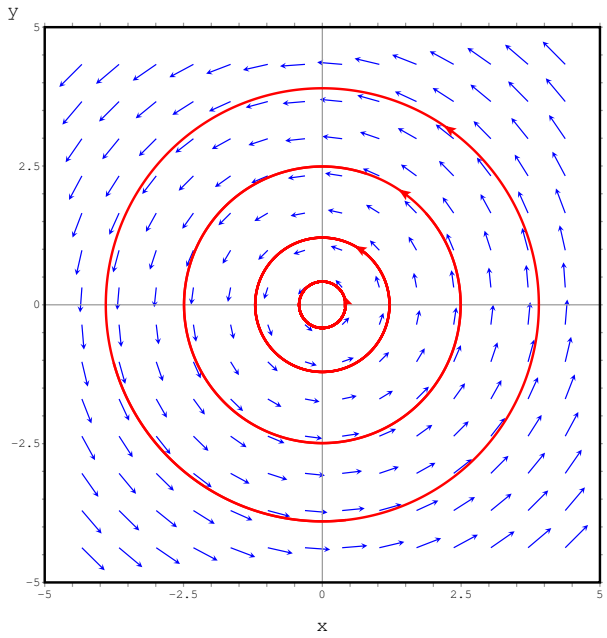


Abbildung 10: Phasenportrait zu $x'(t) = -y(t)$, $y'(t) = x(t)$

09.12.16

Lösungen verlaufen also entlang von Niveaumengen von ersten Integralen.

Bemerkung 8.7. 1. In physikalischen Zusammenhängen ist meist die Gesamtenergie des betrachteten Systems ein erstes Integral und Aussage 2 entspricht einem Energie-Erhaltungssatz.

2. Für $n > 2$ kann man erste Integrale analog definieren; für *gerade* $n > 2$ auch Hamilton-Funktionen; letztere spielen in der klassischen Mechanik eine wichtige Rolle.

Definition 8.8. *Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $g, h \colon U \to \mathbb{R}$ stetig.*

- *Ein* Gleichgewichtspunkt/stationärer Punkt *für* (33) *ist ein $(x_0, y_0) \in U$ mit*

$$g(x_0, y_0) = 0 = h(x_0, y_0).$$

- *Eine Lösung (x, y) von* (33) *heißt* periodisch, *falls x, y auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind und es ein $t_0 > 0$ gibt mit*

$$x(t + t_0) = x(t) \quad \textit{und} \quad y(t + t_0) = y(t) \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Gleichgewichtspunkte entsprechen offenbar genau den konstanten Lösungen von (33).

Das physikalische Pendel

Auf ein Pendel der Masse m wirkt bei Auslenkung α gegenüber der Vertikalen um einen Winkel α in Bewegungsrichtung die Kraft $-mg\sin(\alpha)$, also die Beschleunigung $-g\sin(\alpha)$. Die Pendelbewegung wird somit durch die DGL

$$\alpha''(t) = -g\sin(\alpha) \tag{34}$$

beschrieben. Wir überführen diese skalare DGL 2. Ordnung in ein autonomes System, indem wir die Winkelgeschwindigkeit

$$v(t) := \alpha'(t)$$

als zweite Größe einführen: damit wird (34) äquivalent zu dem autonomen DGL-System

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= v(t), \\ v'(t) &= -g\sin(\alpha(t)). \end{aligned} \tag{35}$$

Die Gesamtenergie des Pendels ist die Summe der kinetischen und der potentiellen Energie. Bis auf einen Faktor, die Masse des Pendels, ist diese bei einem Auslenkungswinkel α und einer Winkelgeschwindigkeit v gegeben durch

$$H(\alpha, v) = \frac{v^2}{2} + g(1 - \cos(\alpha)).$$

Dieses ist ein erstes Integral und sogar eine Hamilton-Funktion, weil

$$\partial_1 H(\alpha, v) = g\sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \partial_2 H(\alpha, v) = v.$$

Für jede Lösung (α, v) des DGL-Systems ist also

$$H(\alpha(t), v(t)) = H(\alpha(t), \alpha'(t)) = \frac{\alpha'(t)^2}{2} + g(1 - \cos(\alpha(t)))$$

gleich einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und dann

$$\alpha'(t) = \pm\sqrt{2(c + g(1 - \cos(\alpha(t))))}.$$

Das Vorzeichen ist hier je nach Anfangswert $\alpha'(t_0)$ zu wählen. Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen, zu deren Lösung man eine Stammfunktion von

$$\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{2(c + g(1 - \cos(\alpha)))}}$$

bestimmen müsste; diese Funktion ist aber nicht elementar integrierbar.

Aufschluss über das Lösungsverhalten bietet aber das Phasenportrait (Abb. 11):

1. Zunächst beschreiben $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha + 2k\pi$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ denselben Winkel, deswegen ist das Phasenportrait periodisch bezüglich der α-Achse.

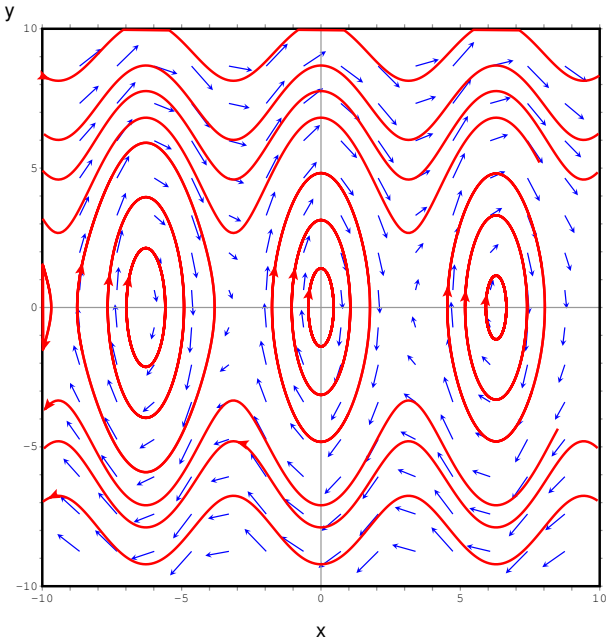


Abbildung 11: Phasenportrait zum physikalischen Pendel (x, y stehen für α, v)

2. *Gleichgewichtspunkte:* Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ ist der Punkt $(k\pi, 0)$ ein Gleichgewichtspunkt mit Geschwindigkeit 0 (Ruhelage). Bei geradem k hängt das Pendel nach unten und bei ungeradem k steht es auf dem Kopf.

3. *Periodische Lösungen:* Die Lösungskurve (α, v) zu einem Startwert (α_0, v_0) mit

   (a) "kleiner" Anfangsgeschwindigkeit v_0 verläuft periodisch, wobei v (die Geschwindigkeit) das Vorzeichen wechselt und das Pendel hin und her schwingt;

   (b) "großer" Anfangsgeschwindigkeit v_0 verläuft nicht periodisch; hier schwankt v, ohne das Vorzeichen zu wechseln, und α wächst oder sinkt monoton — dabei überschlägt sich das Pendel also fortlaufend.

   Genauer sehen wir:

$$\begin{aligned}
(\alpha, v) \text{ ist periodisch} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit } v(t) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } t \in \mathbb{R} \text{ mit } \underbrace{H(\alpha, v)}_{=H(\alpha_0, v_0)} = g(1 - \cos(\alpha(t))) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 \leq H(\alpha_0, v_0) \leq 2g.
\end{aligned}$$

   Fall (a) tritt ein, wenn $H(\alpha_0, v_0) < 2g$, und Fall (b), wenn $H(\alpha_0, v_0) > 2g$.

Räuber-Beute-Modell von Volterra-Lotka

13.12.16

Das Modell Wir betrachten eine Räuber-Population und eine Beute-Population, bezeichnen deren Größe zum Zeitpunkt t jeweils mit $x(t)$ (Beute) beziehungsweise $y(t)$ (Räuber), und suchen ein einfaches Modell für deren gemeinsame zeitliche Entwicklung, das folgende Zusammenhänge erfasst:

1. Betrachten wir die Beute-Population ohne Räuber, so wächst sie proportional zu ihrer Größe (wie bei dem Bakterienmodell).
2. Betrachten wir die Räuber-Population ohne Beute, so schrumpft sie proportional zu ihrer Größe (wie bei dem Bakterienmodell mit negativem Vorzeichen).
3. Interaktionen zwischen Beute und Räubern bedeuten eine Schrumpfung der Beute und Zuwachs der Räuber.

Das entsprechende Modell stammt von Volterra und Lotka und besteht aus zwei "gekoppelten" Differenzialgleichungen beziehungsweise einem Differenzialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \quad ax - bxy = x(a - by), \\ y'(t) &= -cy + dxy = y(dx - c), \end{aligned} \tag{36}$$

wobei $a, b, c, d > 0$. Wir können dieses System nicht explizit lösen, aber einige qualitative Aussagen über die Lösungen machen.

Verlauf der Trajektorien Im uns interessierenden Fall, dass $x(t) > 0$ und $y(t) > 0$, erhalten wir aus (36):

$$x'(t) \gtreqless 0 \;\Leftrightarrow\; y(t) \gtreqless \frac{a}{b} \qquad \text{und} \qquad y'(t) \gtreqless 0 \;\Leftrightarrow\; x(t) \gtreqless \frac{c}{d}.$$

Interessanterweise hängt die Entwicklung einer Population qualitativ (im Vorzeichen) jeweils nur von der Größe der anderen Population ab:

1. Der einzige Gleichgewichtspunkt und die einzige konstante Lösung sind

   $$\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right).$$

   Insbesondere hängt die Lage des Gleichgewichts einer Population nur von den Koeffizienten ab, die das Wachstum der anderen Population beschreiben.

   Eine praktische Folgerung: Zur Bekämpfung von Schädlingen, die natürliche Feinde haben, kann man

   - sich von einem schwachen Gift nur wenig Wirkung erhoffen — dies beeinflusst hauptsächlich die natürlichen Feinde,
   - ein starkes Gift einsetzen, dass die Schädlings-Population auf Größe 0 bringt — mit womöglich nicht vertretbaren Nebenwirkungen,

- die natürlichen Feinde stärken, also deren Wachstumskoeffizienten günstig beeinflussen, um die Gleichgewichts-Größe der Schädlingspopulation zu verringern.

2. Alle anderen Lösungen verlaufen oszillierend, wobei die Größen der Räuber- und der Beute-Population versetzt zueinander schwanken:

   - Ist $x(t) > \frac{c}{d}$ und $y(t) > \frac{a}{b}$, so wachsen die Räuber und dezimieren die Beute, bis diese unter $\frac{c}{d}$ fällt;
   - Ist $x(t) < \frac{c}{d}$ und $y(t) > \frac{a}{b}$, so finden die Räuber zu wenig Beute und schrumpfen, bis sie unter $\frac{a}{b}$ fallen;
   - Ist $x(t) < \frac{c}{d}$ und $y(t) < \frac{a}{b}$, so erholt sich die Beute und wächst, bis sie über $\frac{c}{d}$ steigt;
   - Ist $x(t) > \frac{c}{d}$ und $y(t) < \frac{a}{b}$, so finden die Räuber genug Beute und wachsen, bis sie über $\frac{a}{b}$ steigen.

Genauer kann man zeigen:

3. Durch jeden Punkt im positiven Quadranten verläuft eine periodische Lösung (x, y), die also $x(t+t_1) = x(t)$ und $y(t+t_1) = y(t)$ für eine Periodendauer $t_1 > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, siehe z.B. [FH05, Kapitel 3, (B3)] oder [Wir06, Beispiel 4.2].

4. Für jede solche Lösung ist der zeitliche Mittelwert der Gleichgewichtspunkt, also

$$\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} x(t)dt = \frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} y(t)dt = \frac{a}{b};$$

   siehe Übungsblatt 9, Aufgabe 2.

Ein erstes Integral Ist $x'(t_0) \neq 0$ für ein t_0, so kann man die Funktion x auf einer Umgebung von t_0 umkehren und die Größe der Räuber-Population als Funktion von der Größe der Beute-Population auffassen. Kurz zusammengefasst erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad \text{mit} \quad g(x) = -\frac{c}{x} + d, \quad h(y) = \frac{a}{y} - b. \tag{37}$$

Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Stammfunktionen zu g und h sind gegeben durch

$$G(x) = -c\ln x + dx \quad \text{bzw.} \quad H(y) = a\ln y - by.$$

Folglich ist für jede Lösung der DGL (37)

$$H(y(x)) + C = G(x)$$

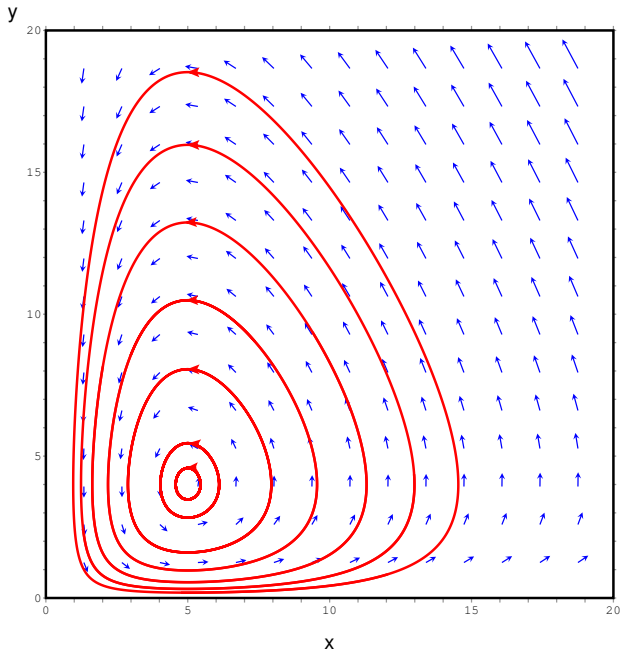


Abbildung 12: Phasenportrait des Räuber-Beute-Modells (36)

für ein $C \in \mathbb{R}$ beziehungsweise

$$F(x, y(x)) := H(y(x)) - G(x) = a \ln y(x) - by(x) + c \ln x - dx = C$$

konstant. Folglich ist für jede Lösung (x, y) der Volterra-Lotka-Gleichung mit $x'(t) \neq 0$ und $x(t), y(t) > 0$ auch $F(x(t), y(t))$ konstant. Mit anderen Worten:

Satz 8.9. *Die Funktion $F(x, y) := a \ln y(x) - by(x) + c \ln x - dx$ ist ein erstes Integral für das DGL-System* (36).

Beweis. Statt die Herleitung rückwärts durchzugehen, kann man einfach Nachrechnen:

$$\begin{aligned}(\partial_1 F)(x, y) \cdot x(a - by) + (\partial_2 F)(x, y) \cdot y(dx - c) &= \left(\frac{c}{x} - d\right) x(a - by) + \left(\frac{a}{y} - b\right) y(dx - c) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

9 Lineare DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten nun besonders einfache autonome DGL-Systeme der Form

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11} y_1(t) + \cdots + a_{1n} y_n(t) \\ &\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ y_n'(t) &= a_{n1} y_1(t) + \cdots + a_{nn} y_n(t) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$y'(t) = Ay(t) \tag{38}$$

mit $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ und einer festen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$.

Beispiel 9.1. Ist $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix, so wird aus (38)

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix},$$

und die allgemeine Lösung hat nach Beispiel 1.2 die Form

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} y_1(0) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_n t} y_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix} y(0).$$

16.12.16

Die Matrix-Exponentialfunktion

Wir wollen zeigen, dass — ähnlich wie im skalaren Fall — die allgemeine Lösung von (38) die Form

$$y(t) = \mathrm{e}^{tA} y(0)$$

besitzt. Dabei wollen wir die Exponentialfunktion für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit Hilfe der Potenzreihe definieren als

$$\mathrm{e}^A = \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{K \to \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!}}_{=:S_K},$$

und müssen zeigen, dass die Folge der Partialsummen $(S_K)_K$ konvergiert, konkret komponentenweise beziehungsweise abstrakter bezüglich einer geeigneten Norm auf dem Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ (vgl. Definitionen 4.2 und 4.3). Da dieser Vektorraum endliche Dimension (n^2) hat, sind alle Normen darauf äquivalent (siehe Analysis 2). Praktisch für uns ist folgende gewichtete Supremums-Norm.

Lemma 9.2. *1. Auf $M_n(\mathbb{R})$ wird durch $\|A\| := n \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$ eine Norm definiert.*

2. Für alle $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

Beweis. 1. Man muss die drei Eigenschaften in Definition 4.2 überprüfen; das ist einfach.
2. Wir schreiben $A = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (b_{ij})_{i,j}$ und $AB = (c_{ij})_{i,j}$. Dann folgt

$$|c_{ik}| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|a_{ij}|}_{\leq \frac{\|A\|}{n}} \cdot \underbrace{|b_{jk}|}_{\leq \frac{\|B\|}{n}} \leq n \frac{\|A\|}{n} \frac{\|B\|}{n}$$

und somit $\|AB\| = n \sup_{1 \leq i,k \leq n} |c_{ik}| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. □

Satz 9.3. *Für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ konvergiert die Folge der Partialsummen*

$$S_K := \sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.

Beweis. Wir zeigen, dass $(S_K)_K$ bezüglich $\|\cdot\|$ eine Cauchy-Folge ist: Für $N > M$ ist

$$\begin{aligned}
\|S_N - S_M\| &= \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \frac{A^k}{k!} \right\| \\
&\leq \sum_{k=M+1}^{N} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| && \text{(Subadditivität der Norm)} \\
&\leq \sum_{k=M+1}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} && \text{(Submultiplikativität, Lemma 9.2 2.)} \\
&\xrightarrow{N>M\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

weil die Reihe $\mathrm{e}^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ konvergiert. □

Definition 9.4. *Für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ definieren wir*

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} := \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!}.$$

Beispiel 9.5 (Mathematisches Pendel)**.** Wir betrachten die DGL des physikalische Pendels $\alpha''(t) = -g \sin \alpha(t)$. Für kleine Auslenkungen $|\alpha(t)|$ kann man $\sin \alpha(t)$ durch $\alpha(t)$ annähern, die DGL durch $\alpha''(t) = -g\alpha(t)$ ersetzen, und erhält damit das sogenannte *mathematische Pendel*. Mit $v(t) := \alpha'(t)$ ist diese DGL äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}}_{=y'(t)} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -g\alpha(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ v(t) \end{pmatrix}}_{=:y(t)}.$$

Hier wird

$$A^2 = \begin{pmatrix} -g & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}, \qquad A^{2k} = \begin{pmatrix} (-g)^k & 0 \\ 0 & (-g)^k \end{pmatrix}, \qquad A^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-g)^k \\ (-g)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{e}^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \dfrac{(-g)^k t^{2k}}{(2k)!} & \dfrac{(-g)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \dfrac{(-g)^{k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} & \dfrac{(-g)^k t^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{g}t & \frac{1}{\sqrt{g}}\sin\sqrt{g}t \\ -\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t & \cos\sqrt{g}t \end{pmatrix},$$

wobei wir folgende Potenzreihen des Kosinus und Sinus für $\phi = \sqrt{g}t$ verwendet haben:

$$\cos\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k}}{(2k)!}, \qquad\qquad \sin\phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \phi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wir setzen nun

$$\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ v(t) \end{pmatrix} := \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(0)\cos\sqrt{g}t + v(0)\frac{1}{\sqrt{g}}\sin\sqrt{g}t \\ -\alpha(0)\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t + v(0)\cos\sqrt{g}t \end{pmatrix}$$

und erhalten damit eine Lösung unseres DGL-Systems, weil dann

$$\alpha'(t) = v(t) \quad \text{und} \quad \alpha''(t) = v'(t) = -\alpha(0)g\cos\sqrt{g}t - v(0)\sqrt{g}\sin\sqrt{g}t = -g\alpha(t).$$

Nun wollen wir allgemein zeigen, dass das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$ die Lösung $y(t) = \mathrm{e}^{At}y(0)$ besitzt, und müssen dazu die Matrix-wertige Funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{At}$ ableiten.

Lemma 9.6. *Erfüllen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ die Relation $AB = BA$, so gilt $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Beweis. Der Beweis kann ähnlich wie für den Fall $A, B \in \mathbb{R}$ geführt werden: es gilt

$$\mathrm{e}^{(A+B)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \underbrace{\frac{1}{k!}\binom{k}{l}}_{=\frac{1}{l!(k-l)!}} A^l B^{k-l} \overset{(2)}{=} \sum_{l=0}^{\infty}\frac{A^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B^m}{m!} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B,$$

wobei im Schritt (1) die binomische Formel für Matrizen und die Annahme $AB = BA$ verwendet wurde, und im Schritt (2) ein Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen von Matrizen, den wir nicht genauer ausführen. □

Folgerung 9.7. *Insbesondere ist $e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0$ die Einheitsmatrix, also e^A für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.*

Satz 9.8. *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$. Die Abbildung $\mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R}), t \mapsto e^{At}$, erfüllt die Gleichung*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}. \tag{39}$$

Beweis. Wir schreiben E_n für die $n \times n$-Einheitsmatrix. Für $t = 0$ und $|h| < 1$ folgt mit der Subadditivität und Submultiplikativität der Norm

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\mathrm{e}^{Ah} - \mathrm{e}^{A0}}{h} - A \right\| &= \frac{1}{|h|} \| \mathrm{e}^{Ah} - E_n - Ah \| \\
&= \frac{1}{|h|} \left\| E_n + \frac{Ah}{1!} + \frac{(Ah)^2}{2!} + \cdots - E_n - Ah \right\| \\
&\leq \frac{\|A\|^2 |h|}{2!} + \frac{\|A\|^3 |h|^2}{3!} + \cdots \\
&\leq |h| \mathrm{e}^{\|A\|} \xrightarrow{h \to 0} 0,
\end{aligned}$$

also gilt (39) für $t = 0$. Für beliebige $t \in \mathbb{R}$ folgt nach obigem Lemma

$$\frac{\mathrm{e}^{A(t+h)} - \mathrm{e}^{At}}{h} = \frac{\mathrm{e}^{Ah} - E_n}{h} \mathrm{e}^{At} \xrightarrow{h \to 0} A \mathrm{e}^{At}. \qquad \square$$

Folgerung 9.9 (Lösung linearer DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten)**.**
Seien $A \in M_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(t_0) = y_0$$

die eindeutige Lösung

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0.$$

Beweis. Die Funktion $y(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} y_0$ erfüllt $y(t_0) = \mathrm{e}^{A0} y_0 = E_n y_0 = y_0$ und nach dem vorigen Satz auch

$$y'(t) = \left(\frac{d}{dt} \mathrm{e}^{A(t-t_0)} \right) y_0 = A \mathrm{e}^{A(t-t_0)} y_0 = Ay(t).$$

Ist z eine weitere Lösung, so erfüllt die Funktion $v(t) := \mathrm{e}^{-At} z(t)$ nach der Produktregel

$$v'(t) = -A\mathrm{e}^{-At} z(t) + \mathrm{e}^{-At} z'(t) = -A\mathrm{e}^{-At} z(t) + \mathrm{e}^{-At} A z(t) = 0,$$

ist also konstant. Folglich ist $\mathrm{e}^{-At} z(t) = \mathrm{e}^{-At_0} z(t_0) = \mathrm{e}^{-At_0} y_0$ und $z(t) = \mathrm{e}^{A(t-t_0)} y_0$. $\square$

Als nächstes wollen wir sehen, wie man e^{At} praktisch berechnen kann.

20.12.16

Lösung mittels Eigenwert-Theorie

Wir haben mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die Lösungen eines DGL-Systems

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit } A \in M_n(\mathbb{R}) \tag{40}$$

in der Form

$$y(t) = \mathrm{e}^{At} y(0)$$

angegeben. In dieser Form sagt uns das nicht sehr viel — zum Beispiel können wir nicht direkt ablesen, ob die Lösungen mit der Zeit wachsen/oszillieren/schrumpfen. Wir beschreiben nun die Lösungen konkreter mit Hilfe von Eigenwerten und -vektoren, und wiederholen dazu grundlegende Begriffe aus der linearen Algebra. Da wurde definiert und gezeigt:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{C} \text{ ist ein } \textit{Eigenwert} \text{ von } A \quad &\overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad \text{es gibt einen } \textit{Eigenvektor } v \in \mathbb{C}^n \text{ mit } v \neq 0 \text{ und } Av = \lambda v \\
&\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } v \in \mathbb{C}^n \text{ mit } v \neq 0 \text{ und } (A - \lambda E_n)v = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \ker(A - \lambda E_n) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{die Matrix } A - \lambda E_n \text{ ist nicht invertierbar} \\
&\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda E_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ ist eine Nullstelle des } \textit{charakteristischen Polynoms} \\
&\qquad\qquad \chi_A(X) = \det(A - XE_n)
\end{aligned}$$

Reelle Eigenwerte Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten liefern reelle Lösungen:

Satz 9.10. *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $y(t) := e^{\lambda t}v$ eine Lösung des DGL-Systems $y'(t) = Ay(t)$.*

Beweis. Variante 1: Wir rechnen $Ay(t) = A\mathrm{e}^{\lambda t}v = \mathrm{e}^{\lambda t}Av = \mathrm{e}^{\lambda t}\lambda v = y'(t)$ und sind fertig.

Variante 2: Aus $Av = \lambda v$ folgt induktiv $A^k v = \lambda^k v$. Nach Folgerung 9.9 ist eine Lösung des DGL-Systems gegeben durch

$$t \mapsto \mathrm{e}^{At}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}v = \mathrm{e}^{\lambda t}v. \qquad \square$$

Folglich wachsen die Lösungen im Fall $\lambda > 0$ bzw. konvergieren gegen 0 im Fall $\lambda < 0$.

Komplexe Eigenwerte Für ein $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ bezeichnet $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ die *komplex-konjugierte Zahl*. Für $w = (w_j)_j \in \mathbb{C}^n$ und $B = (b_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ definieren wir $\overline{w} = (\overline{w_j})_j$ und $\overline{B} = (\overline{b_{ij}})_{i,j}$. Da $\overline{\lambda \cdot \mu} = \overline{\lambda} \cdot \overline{\mu}$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, gilt auch $\overline{\lambda w} = \overline{\lambda} \cdot \overline{w}$, und $\overline{Bw} = \overline{B} \cdot \overline{w}$
.

Eigenvektoren zu komplexen Eigenwerten liefern Paare reeller Lösungen.

Satz 9.11. *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ und sei $w = u + iv \in \mathbb{C}^n$ ein komplexer Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. Dann ist*

1. *$\overline{w}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\overline{\lambda}$;*
2. *$y(t) := e^{\lambda t}w$ und $\overline{y}(t) = e^{\overline{\lambda}t}\overline{w}$ komplex-wertige Lösungen von (40);*
3. *$y_{\mathrm{Re}}(t) := \operatorname{Re} y(t) = \operatorname{Re}\overline{y}(t) = e^{\alpha}\left(\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v\right)$ und*
   $y_{\mathrm{Im}}(t) := \operatorname{Im} y(t) = -\operatorname{Im}\overline{y(t)} = e^{\alpha}\left(\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u\right)$ reelle Lösungen von (40).

Beweis. 1. Da A reell ist, gilt $A \cdot \overline{w} = \overline{Aw} = \overline{\lambda w} = \overline{\lambda} \cdot \overline{w}$.

2. Das folgt wie der Satz 9.10.

3. Es gilt $y'_{\mathrm{Re}}(t) = \operatorname{Re} y'(t) = \operatorname{Re}(Ay(t)) = A \operatorname{Re} y(t) = Ay_{\mathrm{Re}}(t)$ und analog $y'_{\mathrm{Im}}(t) = Ay_{\mathrm{Im}}(t)$. □

Insbesondere oszillieren diese Lösungen im Fall $\beta \neq 0$ wachsen im Fall $\alpha > 0$ in Norm bzw. konvergieren im Fall $\alpha < 0$ gegen 0.

Diagonalisierbarer Fall Unter welchen Bedingungen können wir die allgemeine Lösung des DGL-Systems $y'(t) = Ay(t)$ mit Hilfe der oben gefundenen speziellen Lösungen darstellen? Offenbar muss es dazu "genug" Eigenvektoren geben.

Definition 9.12. 1. *Zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ heißen* ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$ mit $A = SBS^{-1}$ bzw. $SB = AS$ gibt.*

2. *Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ heißt* diagonalisierbar*, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist, also*

$$A = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^{-1} \tag{41}$$

für eine invertierbare Matrix S.

Mit diagonalisierbaren Matrizen kann man besonders gut rechnen: Aus (41) folgt

$$A^2 = S \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} S^{-1}, \qquad \ldots, \qquad A^k = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Satz 9.13. *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar wie in (41). Dann gilt*

$$e^{At} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Beweis. Nach der Vorbemerkung gilt für jedes K

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!} = S \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{K} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{K} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Lassen wir K gegen unendlich gehen, so folgt die Behauptung. □

Wann ist nun eine Matrix diagonalisierbar?

Satz 9.14. *Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren von A gibt.*

Beweis. Vorüberlegung: Sei S eine Matrix mit Spalten $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ und sei $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix. Dann ist

$$AS = (Av_1 \ \dots Av_n) \quad \text{und} \quad SB = (\lambda_1 v_1 \ \dots \ \lambda_n v_n). \tag{42}$$

"$\Leftarrow$" Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist $S := (v_1 \ \dots \ v_n) \in M_n(\mathbb{C})$ invertierbar und aus (42) folgt $AS = SB$.

"$\Rightarrow$": Sei $AS = SB$, wobei S invertierbar ist, und schreibe S, B wie oben. Dann folgt aus (42), dass die Spalte v_j von S jeweils ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j ist. Da S invertierbar ist, bilden die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis. □

Im diagonalisierbaren Fall ist *jede Lösung* eine Linearkombination von Lösungen der Form aus Satz 9.10 und Satz 9.11. Wir geben gleich drei Beweise:

Folgerung 9.15. *Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisierbar wie in (41) mit $S = (v_1 \ \dots \ v_n)$ und sei y eine Lösung y der DGL $y'(t) = Ay(t)$. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Variante 1: Nach Folgerung 9.9 und Satz 9.13 ist

$$y(t) = \mathrm{e}^{At} y(0) = \underbrace{S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{S^{-1} y(0)}_{=: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}} = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n.$$

Variante 2: Die Funktion $z(t) := S^{-1} y(t)$ erfüllt die *entkoppelte DGL*

$$z'(t) = S^{-1} y'(t) = S^{-1} A y(t) = S^{-1} A S \cdot S^{-1} y(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} z(t).$$

Es folgt

$$z(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} z_1(0) \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_n t} z_n(0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y(t) = S z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 \underbrace{z_1(0)}_{=:\alpha_1} + \dots + \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n \underbrace{z_n(0)}_{=:\alpha_n}.$$

Variante 3, Bew.-Skizze: Da die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis bilden, gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $y(0) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Nach Satz 9.10 und 9.11 erfüllt $\tilde{y}(t) := \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} v_n$ die DGL $\tilde{y}'(t) = A\tilde{y}(t)$. Da $y(0) = \tilde{y}(0)$, folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung des AWP $y(t) = \tilde{y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. □

10.01.17

Beispiel 9.16. Wir lösen das AWP

$$y'(t) = Ay(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Schritt 1 — Bestimmung der Eigenwerte von A: Wir berechnen das charakteristische Polynom von A mit der Sarrus-Regel oder durch Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(A - \lambda) = (2 - \lambda)\left((3 - \lambda)^2 - 1\right) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8).$$

Die Wurzeln des Polynoms und somit die Eigenwerte von A sind also

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}, \text{ also } \lambda_2 = \lambda_1 = 2 \text{ und } \lambda_3 = 4.$$

Schritt 2 — Bestimmung der Eigenräume von A: Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ist der Kern von

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 1, der Kern hat also Dimension 3-1=2 und eine Basis ist beispielsweise gegeben durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^\top, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Diese Basis ist natürlich nicht eindeutig!

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$ ist der Kern von

$$A - 4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat Rang 2, der Kern hat also Dimension 3-2=1 und wird beispielsweise aufgespannt durch den Vektor

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^\top.$$

Schritt 3 — Bestimmung der Koeffizienten aus dem Anfangswert: Die allgemeine Lösung der DGL $y'(t) = Ay(t)$ hat nach Folgerung 9.15 die Form

$$y(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2 + \alpha_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t} v_3 \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$

Für die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ergibt sich aus der Anfangsbedigung

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = y(0) = \alpha_1 \mathrm{e}^0 v_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^0 v_2 + \alpha_3 \mathrm{e}^0 v_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}.$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems, z.B. mit dem Gaußschen Algorithmus, führt zu

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Lösung des AWPs 43 gegeben durch

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{2t}\\\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}\\\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix}.$$

Probe: Wir rechnen nach: $y(0) = (1\ 1\ 1)^\top$ und

$$Ay(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cdot 2\mathrm{e}^{2t}\\-1\cdot 2\mathrm{e}^{2t} + 3(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}) + 1\cdot(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t})\\-1\cdot 2\mathrm{e}^{2t} + 1\cdot(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t}) + 3(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{4t})\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cdot 2\mathrm{e}^{2t}\\2\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{4t}\\2\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{4t}\end{pmatrix} = y'(t).$$

Kompartimentmodelle [Heu06, §55]

Wir betrachten n Kompartimente $K_1, \ldots, K_n$, die zum Zeitpunkt t jeweils eine Menge $m_1(t), \ldots, m_n(t)$ eines Stoffes enthalten, der zwischen den Kompartimenten ausgetauscht wird.

Wir betrachten zunächst einen *diskreten/getakteten Austausch* folgender Form: Für $i \neq j$ werde vom Kompartiment K_j in das Kompartiment K_i pro Zeiteinheit Δt ein Anteil des Stoffes transportiert, der proportional zu $m_j(t)$ und der Zeiteinheit Δt ist, also insgesamt die Menge

$$\Delta t \cdot a_{ij} \cdot m_j(t) \quad \text{mit einer Konstanten } a_{ij}.$$

Im Fall $a_{ij} = 0$ findet einfach kein Transport von K_j nach K_i statt.

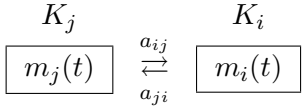


Abbildung 13: Kompartimentmodell

Dann folgt für $i = 1, \dots, n$ jeweils

$$\begin{aligned} m_i(t+\Delta t) &= m_i(t) + \underbrace{\sum_{j\neq i} a_{ij}\cdot \Delta t \cdot m_j(t)}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{\sum_{j\neq i} a_{ji}\cdot \Delta t\cdot m_i(t)}_{\text{Abfluss}} \\ &= m_i(t) + \Delta t \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j(t) \quad \text{mit } a_{ii} := -\sum_{j\neq i} a_{ji}, \end{aligned}$$

beziehungsweise in Vektor- und Matrix-Schreibweise

$$m(t+\Delta t) = m(t) + \Delta t \cdot A \cdot m(t) \quad \text{mit } A = (a_{ij})_{i,j},\ m(t) = (m_i(t))_i. \tag{44}$$

Wir schreiben das in der Form $m(t) = (E_n + \Delta t \cdot A)m(t)$ und finden induktiv

$$m(t + k\Delta t) = (E_n + \Delta t \cdot A)^k m(t) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

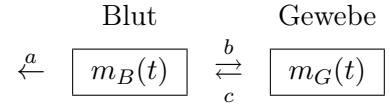
Bei einem *kontinuierlichen Austausch* gilt eine Beziehung wie (44) nur im Limes für $\Delta t \to 0$ und wir erhalten

$$m'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = A \cdot m(t), \tag{45}$$

also ein DGL-System mit konstanten Koeffizienten mit der Lösung $m(t) = \mathrm{e}^{At} m(0)$.

Beispiel 9.17. Betrachten wir n Behälter mit Lösungen eines Salzes in unterschiedlicher Konzentration und Rohren zwischen den Behältern, durch die aufgrund unterschiedlichen Querschnitts jeweils ein unterschiedlicher Austausch stattfindet, so können wir den resultierenden Mischprozess durch ein Kompartimentmodell beschreiben. Mehr dazu im folgenden Kapitel.

Beispiel 9.18. Ein einfaches Modell für den Abbau eines im Körper befindlichen Medikamentes ([Heu06, §46]) unterstellt als wesentliche Kompartimente das Blut und das Gewebe und dazwischen einen kontinuierlichen Austausch



mit Raten $a, b, c > 0$, also das DGL-System

$$\begin{pmatrix} m_B'(t) \\ m_G'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b & c \\ b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_B(t) \\ m_G(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -a-b & c \\ b & -c \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom

$$(\lambda + a + b)(\lambda + c) - bc = \lambda^2 + (a+b+c)\lambda + ac$$

und somit die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a+b+c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^2 - 4ac}.$$

Diese sind verschieden, weil

$$(a+b+c)^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0,$$

und kleiner als Null, weil

$$\sqrt{(a+b+c)^2 - 4ac} < a+b+c.$$

Man kann nun Eigenvektoren $v_{1,2}$ zu $\lambda_{1,2}$ berechnen und erhält als allgemeine Lösung für $m(t) = (m_B(t)\ m_G(t))^\top$:

$$m(t) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} v_1 + \alpha_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} v_2 \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R},$$

also sind $m_B(t)$ und $m_G(t)$ jeweils die Summe zweier exponentiell abfallender Funktionen.

13.01.17

Beispiel 9.19 (Radioaktive Zerfallsreihe, [Heu06, §55])**.** Uran 238 zerfällt über 13 Zwischenstufen in stabiles Blei. Ist β_i die Zerfallskonstante der i-ten Stufe, so lässt sich der Zerfall durch ein Kompartimentmodell der Form

$$\boxed{m_1(t)} \xrightarrow{\beta_1} \boxed{m_2(t)} \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_{n-1}} \boxed{m_n(t)}$$

beschreiben bzw. durch das DGL-System

$$m'(t) = Am(t) \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 & -\beta_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta_{n-2} & -\beta_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1} > 0$.

Das charakteristische Polynom von A ist

$$(\lambda+\beta_1)(\lambda+\beta_2)\cdots(\lambda+\beta_{n-1})\lambda,$$

die Eigenwerte sind also $\lambda_i = -\beta_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\lambda_n = 0$.

Für jeden Eigenwert λ von A ist der zugehörige Eigenraum $\ker(A-\lambda)$ nur eindimensional, weil in der Matrix $A-\lambda$ die zweite bis zur letzten Zeile linear unabhängig sind und folglich $\dim\ker(A-\lambda) = n - \mathrm{Rang}(A-\lambda) = n-(n-1) = 1$.

Sind die β_i paarweise verschieden, so hat A n verschiedene Eigenwerte, ist diagonalisierbar, und wir können mit Folgerung 9.15 die allgemeine Lösung beschreiben. Andernfalls hat A weniger als n Eigenwerte und ist nach obiger Überlegung nicht mehr diagonalisierbar.

Eine andere Lösungsmöglichkeit besteht darin, erst m_1 aus

$$m_1'(t) = -\beta_1 m_1(t)$$

zu bestimmen, also $m_1(t) = \mathrm{e}^{-\beta_1 t} m_1(0)$, und dann schrittweise für $i = 1, 2, \ldots, n-1$ nacheinander jeweils die lineare skalare DGL

$$m_{i+1}'(t) = \beta_i m_i(t) - \beta_{i+1} m_{i+1}(t)$$

zu lösen.

Verallgemeinerte Eigenvektoren/Hauptvektoren

Wir betrachten nun die DGL

$$y'(t) = Ay(t)$$

für den Fall, dass $A \in M_n(\mathbb{C})$ nicht diagonalisierbar ist, und wiederholen dafür aus der linearen Algebra:

Definition 9.20. *Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Ein $v \in \mathbb{C}^n$ heißt* verallgemeinerter Eigenvektor *oder* Hauptvektor *von A der Stufe $k \geq 1$ zum Eigenwert λ, falls $(A-\lambda)^k v = 0$ und $(A-\lambda)^{k-1} v \neq 0$.*

Beispiel 9.21. In Beispiel 9.19 erhalten wir für $n = 2$ und $\beta_1 = \beta_2 =: \beta$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ \beta & -\beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Für diese ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zweiter Stufe zum Eigenwert $-\beta$:

$$(A+\beta)^2 v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Hauptvektoren zu einem Eigenwert λ zuzüglich des Nullvektors heißt der *Hauptraum* von A zum Eigenwert λ und wird mit $H_\lambda(A)$ bezeichnet, also

$$H_\lambda(A) = \left\{ v \in \mathbb{C}^n : (A-\lambda)^k v = 0 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

In der linearen Algebra beweist man:

Satz 9.22 (Hauptraumzerlegung)**.** *Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Dann besitzt $\mathbb{C}^n$ eine Basis aus Hauptvektoren von A, genauer gilt*

$$\mathbb{C}^n \cong \bigoplus_{\lambda} H_\lambda(A),$$

wobei die Summe über alle Eigenwerte λ von A gebildet wird.

Jeder Hauptvektor liefert eine Lösung der DGL:

Satz 9.23. *Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Hauptvektor von A der Stufe k zum Eigenwert λ und seien $v_0 = v$, $v_1 = (A-\lambda)v$, …, $v_{k-1} = (A-\lambda)^{k-1}v$. Dann ist*

$$y(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda t} v_j$$

eine (möglicherweise komplex-wertige) Lösung der DGL $y'(t) = Ay(t)$.

Beweis. Nach Folgerung 9.9 ist eine Lösung gegeben durch

$$y(t) = \mathrm{e}^{At}v \overset{9.6}{=} \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{e}^{(A-\lambda)t}v$$

$$= \mathrm{e}^{\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j (A-\lambda)^j}{j!} v$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \mathrm{e}^{\lambda t} v_j, \quad \text{da } (A-\lambda)^j v = \begin{cases} 0, & j \geq k, \\ v_j, & j < k. \end{cases} \qquad \square$$

Ähnlich wie zuvor erhält man nun

- mit dem Real- und dem Imaginärteil einer komplex-wertigen Lösung zwei reell-wertige Lösungen (vgl. Satz 9.11),
- die allgemeine Lösung des AWPs durch Linearkombination von Lösungen zu einer Basis aus Hauptvektoren (vgl. Folgerung 9.15).

10 Lineare DGL-Systeme erster Ordnung

Wir betrachten nun DGL-Systeme der Form

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \tag{46}$$

mit einer matrix-wertigen Funktion A und einer vektor-wertigen Funktion b.

Definition 10.1. *Ein* lineares DGL-System erster Ordnung *ist eine DGL-System der Form* (46)*. Im Fall $b \equiv 0$ heißt es* homogen*, sonst* inhomogen.

17.01.17

In der Vorlesung am 13. Januar, bezeichnenderweise ein Freitag, habe ich die Lösungstheorie linearer DGL-Systeme erster Ordnung leider falsch dargestellt. Wir diskutieren die Fehler und eine Richtigstellung nach dem folgenden Abschnitt in den Sätzen 10.9 und 10.10.

Struktur der Lösungsmenge

Eine praktische und allgemein anwendbare Lösungsmethde für homogene lineare DGL-Systeme gibt es nicht. Mit einer Variante des Satzes von Picard-Lindelöf für DGL-Systeme kann man aber zeigen:

Satz 10.2 (Existenz und Eindeutig)**.** *Seien* $A\colon (\alpha,\beta) \to M_n(\mathbb{R})$ *und* $b\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$ *stetig,* $t_0 \in (\alpha,\beta)$ *und* $y_0 \in \mathbb{R}^n$*. Dann hat das AWP*

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \quad \textit{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

auf (α,β) *eine eindeutige Lösung.*

Bemerkung 10.3. Die DGL zeigt, dass dann y' (wie A, b und y) stetig ist, also y stetig differenzierbar ist.

Bezeichne $C((\alpha,\beta);\mathbb{R}^n)$ die Menge aller stetigen vektor-wertigen Funktionen $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$. Diese Menge ist ein Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Operationen

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t) \quad \text{und} \quad (\lambda \cdot f)(t) := \lambda f(t).$$

Lemma 10.4 (Superpositionsprinzip)**.** *Seien* $A\colon (\alpha,\beta) \to M_n(\mathbb{R})$ *und* $b = \lambda_1 b_{(1)} + \lambda_k b_{(k)}$ *mit gewissen* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ *und stetigen* $b_{(j)}\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n$*. Erfüllt jeweils* $y_{(j)}$ *die DGL*

$$y'_{(j)}(t) = A(t)y_{(j)}(t) + b_{(j)}(t),$$

so erfüllt $y := \lambda_1 y_{(k)} + \cdots + \lambda_k y_{(k)}$ *die DGL*

$$y'(t) = Ay(t) + b(t).$$

Beweis. Es folgt

$$\begin{aligned} y'(t) &= \lambda_1 y'_{(1)}(t) + \cdots + \lambda_k y'_{(k)}(t) \\ &= \lambda_1(A(t)y_{(1)}(t) + b_{(1)}(t)) + \cdots + \lambda_k(A(t)y_{(k)}(t) + b_{(k)}(t)) \\ &= A(t)(\lambda_1 y_{(1)}(t) + \cdots + \lambda_k y_{(k)}(t)) + (\lambda_1 b_{(1)}(t) + \cdots + \lambda_k b_{(k)}(t)) \\ &= A(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

□

Folglich bilden die Lösungen eines *homogenen* DGL-Systems einen Vektorraum:

Satz 10.5. *Sei* $A\colon (\alpha,\beta) \to M_n(\mathbb{R})$ *stetig. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{L}_h = \{y\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^n \textit{ diffbar mit } y'(t) = A(t)y(t) \textit{ für alle } t \in (\alpha,\beta)\} \subset C((\alpha,\beta);\mathbb{R}^n)$$

ein n*-dimensionaler Untervektorraum und für jedes* $t_0 \in (\alpha,\beta)$ *ist die Abbildung*

$$\mathcal{L}_h \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto y(t_0), \tag{47}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis. Lemma 10.4, angewendet auf den Fall $b_{(1)} = \cdots = b_{(k)} = 0$, zeigt, dass $\mathcal{L}_h$ ein Untervektorraum ist. Die Abbildung (47) ist offenbar linear und nach Satz 10.2 bijektiv. Folglich ist $\dim \mathcal{L}_h = \dim \mathbb{R}^n = n$. □

Mit den Bezeichnungen des obigen Satzes definieren wir:

Definition 10.6. *Ein* Fundamentalsystem *der homogenen DGL $y'(t) = A(t)y(t)$ ist eine Basis $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ von $\mathcal{L}_h$; man nennt dann*

$$Y\colon (\alpha, \beta) \to M_n(\mathbb{R}), \quad t \mapsto (y_{(1)}(t) \ \ldots \ y_{(n)}(t))$$

eine Fundamentalmatrix *dieser DGL.*

Bemerkung 10.7.

1. Ist $y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}$ ein Fundamentalsystem und Y eine Fundamentalmatrix des DGL-Systems $y'(t) = A(t)y(t)$, so gibt es für jede Lösung y eindeutige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $y = \sum_i \lambda_i y_{(i)}$, also genau ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $y(t) = Y(t)v$ für alle t.

2. Eine matrix-wertige Funktion $Y\colon (\alpha, \beta) \to M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann eine Fundamentalmatrix von $y'(t) = Ay(t)$, wenn $Y'(t) = A(t)Y(t)$ für alle $t \in (\alpha, \beta)$ und wenn $Y(t)$ für ein (und dann alle) $t \in (\alpha, \beta)$ invertierbar ist.

3. Ist $A \in M_n(\mathbb{R})$, so wird durch $Y(t) := \mathrm{e}^{At}$ eine Fundamentalmatrix für die DGL $y'(t) = Ay(t)$ definiert. Dies folgt aus (2), Satz 9.8 und Folgerung 9.7.

Im *inhomogenen* Fall bilden die Lösungen einen affinen Unterraum:

Satz 10.8. *Seien $A\colon (\alpha, \beta) \to M_n(\mathbb{R})$ und $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{L} = \{y \in C((\alpha, \beta); \mathbb{R}^n) : y'(t) = Ay(t) + b(t) \text{ für alle } t \in (\alpha, \beta)\}$$

ein affiner Unterraum, genauer gilt $\mathcal{L} = y_p + \mathcal{L}_h$ für jedes $y_p \in \mathcal{L}$.

Beweis. Aus Lemma 10.4 folgt

- für jedes $y_h \in \mathcal{L}_h$ ist $y_p + y_h \in \mathcal{L}$;
- für jedes $y \in \mathcal{L}$ ist $y - y_p \in \mathcal{L}_h$ und $y = y_p + (y - y_p) \in y_p + \mathcal{L}_h$. □

Korrektur der falschen Sätze 10.2 und 10.3 aus der Vorlesung vom 13.1.

Die Lösung einer homogenen DGL mit der Matrix-Exponentialfunktion erfordert eine Zusatzannahme (48):

Satz 10.9 (Spezialfall)**.** *Sei $A\colon (a, b) \to M_n(\mathbb{R})$ stetig, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ und*

$$A(t)A(s) = A(s)A(t) \quad \text{für alle } s, t \in (\alpha, \beta). \tag{48}$$

Schreibe $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j}$ und setze

$$Y(t) := e^{B(t)} \quad \text{mit} \quad B(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)ds := \left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)ds\right)_{i,j}.$$

Dann ist Y eine Fundamentalmatrix für das DGL-System $y'(t) = Ay(t)$.

Beweis. Nach Kettenregel gilt

$$Y'(t) = \left(\frac{d}{dt}\exp(B(t))\right) = (D\exp)(B(t))B'(t),$$

wobei

$$B'(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} = A(t)$$

und $(D\exp)(B(t))$ die Ableitung der Matrix-Exponentialfunktion an der Stelle $\mathcal{B} := B(t)$ in Richtung $\mathcal{A} := A(t)$ bezeichnet, also

$$(D\exp)(B(t))A(t) = (D\exp)(\mathcal{B})\mathcal{A} = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\exp(\mathcal{B}+s\mathcal{A}).$$

Aus (48) folgt $B(t)A(t) = A(t)B(t)$, also $\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$ und $\exp(\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}\exp(\mathcal{B})$, und mit Lemma 9.6 und Satz 9.8 folgt

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\exp(\mathcal{B}+s\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{B})\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\exp(s\mathcal{A}) = \exp(\mathcal{B})\mathcal{A} = \mathcal{A}\exp(\mathcal{B}) = A(t)\exp(B(t)).$$

Zusammengefasst erhalten wir $Y'(t) = A(t)\exp(B(t)) = A(t)Y(t)$. Folglich sind die Spalten von Y jeweils Lösungen des DGL-Systems. Die Spalten sind linear unabhängig, weil $Y(t) = \exp(B(t))$ für jedes t invertierbar ist. □

Der in der Vorlesung am 13. Januar formulierte Satz 10.3 zur Lösung inhomogener Systeme ist auch *nur unter der Zusatzannahme* (48) gültig, aber der Ansatz kann mit einem Lösungs-Fundamentalsystem gerettet werden:

Satz 10.10 (Inhomogener Fall)**.** *Seien* $A\colon (a,b) \to M_n(\mathbb{C})$ *und* $b\colon (a,b) \to \mathbb{C}^n$ *stetig,* $t_0 \in (a,b)$ *und* Y *eine Fundamentalmatrix des DGL-Systems* $y'(t) = A(t)y(t)$*. Setze*

$$c(t) := \int_{t_0}^{t} Y(s)^{-1}b(s)ds.$$

Dann ist

$$y(t) = Y(t)c(t).$$

eine Lösung des linearen DGL-Systems $y'(t) = Ay(t) + b(t)$*.*

Beweis. Nach Hauptsatz gilt $c'(t) = Y(t)^{-1}b(t)$ und mit Produktregel und der Annahme an Y folgt

$$y'(t) = Y'(t)c(t) + Y(t)c'(t) = A(t)Y(t)c(t) + Y(t)Y(t)^{-1}b(t) = A(t)y(t) + b(t). \quad \square$$

Teil III
Lineare skalare DGL höherer Ordnung

11 Reduktion auf Systeme erster Ordnung

20.01.17

Schlüsselidee Eine skalare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung der Form

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \tag{49}$$

ist gleichwertig zu dem DGL-System erster Ordnung

$$\begin{aligned} y_0'(t) &= y_1(t), \\ y_1'(t) &= y_2(t), \\ &\vdots \\ y_{n-2}'(t) &= y_{n-1}(t), \\ y_{n-1}'(t) &= f(t, y_0(t), \dots, y_{n-1}(t)). \end{aligned} \tag{50}$$

Begründung: Löst x (49), so löst $y := (x, x', \dots, x^{(n-1)})$ (50), und löst $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$ (50), so folgt $y_i = y_0^{(i)}$ für alle i und $x := y_0$ löst (49).

Wir betrachten nun Differenzialgleichungen der folgenden Form:

Definition 11.1. *Eine* skalare lineare DGL n-ter Ordnung *ist eine DGL der Form*

$$x^{(n)}(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x'(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + b(t) \tag{51}$$

mit Funktionen $a_0, \dots, a_{n-1}, b$. Sie heißt homogen*, falls $b \equiv 0$, und inhomogen sonst.*

Aus obiger Idee und den Sätzen des vorigen Kapitels folgt:

Folgerung 11.2. *Seien $a_0, \dots, a_{n-1}, b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann*

- *hat die DGL (51) für jedes $t_0 \in (\alpha, \beta)$ und $x_{(0)} \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung x mit $(x(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)) = x_{(0)}$;*
- *bilden die Lösungen $x_h\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ der zu (51) gehörigen homogenen DGL einen n-dimensionalen Untervektorraum $\mathcal{L}_h \subseteq C((\alpha, \beta))$ und für jedes $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ist die Abbildung*

  $$\mathcal{L}_h \to \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)),$$

  ein Isomorphismus von Vektorräumen;
- *bilden die Lösungen $x\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ der DGL (51) einen affinen Unterraum von $\mathcal{L} \subseteq C((\alpha, \beta))$ und für jedes $x_p \in \mathcal{L}$ gilt $\mathcal{L} = x_p + \mathcal{L}_h$.*

Definition 11.3. *In der obigen Situation nennt man eine Basis von $\mathcal{L}_h$ ein Fundamentalsystem der zu (51) gehörigen homogenen DGL.*

12 Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Der homogene Fall

Wir betrachten nun eine homogene lineare DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \tag{52}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{n-1}, \ldots, a_0$.

Definition 12.1. *Das* charakteristische Polynom *der DGL* (52) *ist*

$$p(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots - a_1 X + a_0.$$

Das zugeordnete homogene DGL-System hat die Form

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{53}$$

und kann also mit den Methoden aus Kapitel 9 gelöst werden:

- Das charakteristische Polynom von A ist gleich dem charakteristischen Polynom von (57): Entwicklung der Determinante von $\lambda - A$ nach der letzten Zeile liefert

$$\begin{aligned} \det(\lambda - A) &= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} a_{j-1} \lambda^{j-1} (-1)^{n-j} + (\lambda - a_{n-1})\lambda^{n-1} \\ &= \lambda^n + a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} = p(\lambda). \end{aligned}$$

  Die Eigenwerte von A sind also die Nullstellen von p.

- Ist λ ein Eigenwert, so ist

$$v := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}^\top$$

  ein Eigenvektor:

$$Av = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \underbrace{-a_0 - \lambda a_1 - \cdots - a_{n-1}\lambda^{n-1}}_{\lambda^n} \end{pmatrix} = \lambda v.$$

Folglich ist $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} v$ eine Lösung des Systems (53) und $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Lösung der DGL (52). Dies kann man auch einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} a_0\mathrm{e}^{\lambda t} + a_1(\mathrm{e}^{\lambda t})' + \cdots + a_{n-1}(\mathrm{e}^{\lambda t})^{(n-1)} + (\mathrm{e}^{\lambda t})^{(n)} \\ &= a_0\mathrm{e}^{\lambda t} + a_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + \lambda^n\mathrm{e}^{\lambda t} \\ &= p(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Beispiel 12.2 (Ungedämpfter harmonischer Oszillator)**.** Wir betrachten einen Massepunkt, der bei $x = 0$ an einer Feder befestigt ist:

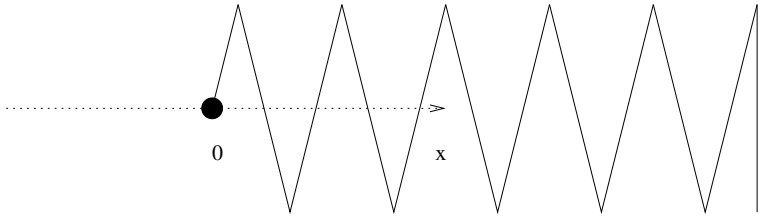


Abbildung 14: Massepunkt an Feder

Bei Auslenkung des Massepunktes in x-Richtung und entsprechender Dehnung oder Stauchung der Feder wirkt auf den Massepunkt die Beschleunigung

$$x'' = -\frac{k}{m}x,$$

wobei k eine von der Feder abhängige Konstante und m die Masse des Massepunktes bezeichnet. Die Bewegung des Massepunktes auf der x-Achse wird somit durch die DGL

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

beschrieben, ähnlich wie das mathematische Pendel, vgl. Beispiel 9.5. Man schreibt $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ und nennt die DGL

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{54}$$

die DGL des *(ungedämpften) harmonischen Oszillators*, wobei mit dem Begriff Oszillator ein schwingendes physikalisches System gemeint ist. Das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + \omega^2$$

hat die konjugiert-komplexen Wurzeln $\pm i\omega$. Die allgemeine Lösung von (54) ist also

$$x(t) = \alpha_1 \cos\omega t + \alpha_2 \sin\omega t \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{55}$$

Für feste α_1 und $\alpha_2 \neq 0$ kann man dies schöner schreiben: es gilt

$$\alpha_1 = C\sin\phi \quad \text{und} \quad \alpha_2 = C\cos\phi, \quad \text{wobei } \phi = \arctan\frac{\alpha_1}{\alpha_2},\ C = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2},$$

also

$$x(t) = C(\sin\phi\cos\omega t + \cos\phi\sin\omega t) = C\sin(\phi+\omega t).$$

Eine Lösung x mit vorgegebenen Anfangswerten

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0,$$

finden wir, indem wir α_1, α_2 in (55) aus dem linearen Gleichungssystem

$$x_0 = \alpha_1\cos\omega t_0 + \alpha_2\sin\omega t_0, \qquad v_0 = -\alpha_1\omega\sin\omega t_0 + \alpha_2\omega\cos\omega t_0$$

bestimmen.

Beispiel 12.3 (Gedämpfter harmonischer Oszillator)**.** Wird in obigem Beispiel die Bewegung des Massepunktes durch auftretende Reibung gehemmt, die proportional zur Geschwindigkeit $x'(t)$ ist, so wird die Bewegung durch die DGL des *gedämpften harmonischen Oszillators*

$$x''(t) + 2\rho x'(t) + \omega^2 x(t) = 0$$

mit einem $\rho > 0$ beschrieben. Die Wurzeln sind diesmal

$$-\rho \pm \sqrt{\rho^2-\omega^2}.$$

24.01.17

Die allgemeine Lösung ist dann

- im Fall $\rho > \omega$ *(starke Dämpfung)*

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(\alpha_1\mathrm{e}^{\upsilon t} + \alpha_2\mathrm{e}^{-\upsilon t}) \quad \text{mit } \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \upsilon := \sqrt{\rho^2-\omega^2};$$

- im Fall $\rho < \omega$ *(schwache Dämpfung)*

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\rho t}(\alpha_1\cos\upsilon t + \alpha_2\sin\upsilon t) \quad \text{mit } \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R} \quad \text{und } \upsilon = \sqrt{\omega^2-\rho^2}$$

beziehungsweise (vgl. voriges Beispiel)

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sigma-\rho t}\sin(\phi+\upsilon t) \quad \text{mit } \sigma,\phi \in \mathbb{R};$$

die Bewegung klingt schwingend ab mit größerer Periodendauer $\frac{2\pi}{\upsilon}$ als im Fall ohne Reibung:

Wie kommt man zu weiteren Lösungen, wenn p mehrfache Nullstellen hat, zum Beispiel, wenn $\rho = \omega$ im obigen Beispiel?

Satz 12.4. *Seien $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und*

$$p(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = (X-\lambda_1)^{d_1} \cdots (X-\lambda_r)^{d_r}. \tag{56}$$

Dann ist ein Fundamentalsystem der DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \tag{57}$$

gegeben durch die Real- und Imaginärteile der Funktionen

$$x_{j,s}(t) := t^s e^{\lambda_j}$$

für $j = 1, \dots, r$ und $s = 0, \dots, d_j - 1$.

Beweis-Skizze. Vorüberlegung: Sei j fest und $\lambda := \lambda_j$, $d := d_j$. Dann ist

$$p(\lambda) = 0, \qquad p'(\lambda) = 0, \qquad \dots, \qquad p^{(d-1)}(\lambda) = 0.$$

Wir zeigen auf drei verschiedene Arten, dass für $0 \le s < d$ die Funktion $x = x_{j,s}$ die DGL löst. Die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen kann mit Hilfe des Übergangs zum zugehörigen System zeigen oder, indem man das Wachstumsverhalten der Lösungen für $t \to \infty$ betrachtet.

Variante 1: Man zeigt induktiv, dass die Vektoren

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \quad w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ \binom{1}{1} \\ \binom{2}{1}\lambda \\ \vdots \\ \binom{n-1}{1}\lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \quad w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \binom{2}{2} \\ \binom{3}{2}\lambda \\ \vdots \\ \binom{n-1}{2}\lambda^{n-2} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

für $1 \le s \le d$ jeweils $(A-\lambda)w_s = w_{s-1}$ erfüllen, also Hauptvektoren erster, zweiter, dritter, … Stufe von A zum Eigenwert λ sind. Satz 9.23 liefert zu w_s eine vektor-wertige Lösung, deren erste Komponente $\frac{1}{s!}x_{j,s}$ ist.

Variante 2: Man beweist induktiv die höhere Leibniz-Formel

$$(fg)^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} f^{(l)}(t) g^{(m-l)}(t)$$

für m-fach differenzierbare Funktionen f, g; als Eselsbrücke kann man sich merken:

(Ableiten eines Produktes)^n = (Ableiten des ersten Faktors + Ableiten des zweiten Faktors)^n

Anwendung auf die Funktion $x = x_{j,s} \colon t \mapsto t^s \mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert

$$x^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (t^s)^{(l)} \lambda^{m-l} \mathrm{e}^{\lambda t} = \sum_{l=0}^{m} \underbrace{m(m-1)\cdots(m-l+1)\lambda^{m-l}}_{\lambda^m,\ l \text{ mal nach } \lambda \text{ abgeleitet}} \cdot \frac{(t^s)^{(l)}}{l!} \mathrm{e}^{\lambda t}$$

und damit

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1x'(t) + a_0x(t) = \sum_{l=0}^{n} p^{(l)}(\lambda)\frac{(t^s)^{(l)}}{l!}\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{58}$$

Die rechte Seite ist 0, weil $p^{(l)}(\lambda) = 0$ für $l < d$ und $(t^s)^{(l)} = 0$ für $l \geq d > s$.

Variante 3: Wir betrachten den Untervektorraum $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen. Die Abbildung $D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$, ist linear und damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x(t) &= (D^n(x))(t) + (a_{n-1}D^{n-1}(x))(t) + \cdots + (a_0x)(t) \\ &= (p(D)(x))(t). \end{aligned}$$

Nach (56) liefert Anwendung von $p(D)$ auf x dasselbe wie die Anwendung von $(D - \lambda_1)^{d_1}, \ldots, (D-\lambda_r)^{d_r}$ auf x, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Für $\lambda = \lambda_j$ gilt aber

$$(D - \lambda)(t^s\mathrm{e}^{\lambda t}) = (st^{s-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + t^s\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}) - \lambda t^s\mathrm{e}^{\lambda t} = st^{s-1}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

und induktiv folgt $(D - \lambda)^d(t^s\mathrm{e}^{\lambda t}) = 0$ für $s < d$ und damit $(p(D))(x_{j,s}) = 0$. □

Der inhomogene Fall

Um eine partikuläre Lösung einer linearen inhomogenen DGL höherer Ordnung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdot + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = b(t) \tag{59}$$

zu finden, kann man im Prinzip *Variation der Konstanten* wie im Fall erster Ordnung verwenden: Ist x_h eine Lösung der homogenen DGL, so macht man für eine Lösung x_p der inhomogenen DGL den Ansatz $x_p(t) = c(t)x_h(t)$. Nun setzt man diesen Ansatz in die DGL ein, schreibt die Ableitungen $x_p^{(m)}$ mit Hilfe der höheren Leibniz-Regel als Linearkombinationen von $c^{(l)}x_p^{(m-l)}$ für $l = 0, \ldots, m$, sortiert dann auf der linken Seite nach Ableitungen von c, und erhält für die gesuchte Funktion c eine DGL der Form

$$x_h(t)c^{(n)}(t) + d_{n-1}(t)c^{(n-1)}(t) + \cdots d_1(t)c'(t) + d_0(t)c(t) = b(t), \tag{60}$$

wobei die Funktionen d_i von den a_j und $x_h^{(l)}$ abhängen. Dabei wird

$$d_0(t) = x_h^{(n)}(t) + a_{n-1}x_h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x_h(t) = 0$$

und somit ist (60) eine lineare DGL für c' der Ordnung $n - 1$. Schrittweise kann man so die Ordnung immer weiter reduzieren und schließlich eine Lösung von (59) erhalten.

27.01.17

Offenbar ist dieses Verfahren recht aufwändig.

Wir betrachten jetzt deswegen nur lineare DGL mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten und beginnen mit der Ordnung 1.

Lemma 12.5. *Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und q ein Polynom vom Grad m. Dann hat die DGL*

$$x'(t) + \mu x(t) = q(t)e^{\lambda t}$$

eine komplex-wertige Lösung der Form $x(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ mit einem Polynom Q vom Grad m im Fall $\lambda \neq \mu$ beziehungsweise $m+1$ im Fall $\lambda = \mu$.

Beweis. Der Ansatz $x(t) = Q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert nach Produktregel

$$x'(t) + a_0 x(t) = (Q'(t) + Q(t)\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t} + a_0 Q(t)\mathrm{e}^{\lambda t} = (Q'(t) + (\lambda + a_0)Q(t))\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Falls $p(\lambda) = \lambda + a_0 = 0$, wird die rechte Seite $Q'(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ gleich $q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, wenn wir für Q eine Stammfunktion von q wählen; dies ist ein Polynom vom Grad $m+1$.

Falls $p(\lambda) \neq 0$, so schreiben wir $q(t) = b_m t^m + \cdots + b_1 t^1 + b_0$ und suchen ein Polynom $Q(t) = c_m t^m + \cdots + c_1 t + c_0$ so, dass

$$\begin{aligned} b_m t^m + \cdots + b_1 t^1 + b_0 = q(t) &= Q'(t) + (\lambda + a_0)Q(t) \\ &= (\lambda + a_0)c_m t^m + ((\lambda + a_0)c_{m-1} + m c_m)t^{m-1} + \cdots \\ &\quad + ((\lambda + a_0)c_1 + 2c_2)t^1 + ((\lambda + a_0)c_0 + c_1). \end{aligned}$$

Dazu setzen wir einfach

$$c_m = \frac{b_m}{\lambda + a_0}, \qquad c_{m-1} = \frac{b_{m-1} - m c_m}{\lambda + a_0}, \qquad \ldots, \qquad c_0 = \frac{b_1 - c_1}{\lambda + a_0}. \qquad \square$$

Nun können wir die Aussage auf DGLn höherer Ordnung verallgemeinern:

Satz 12.6. *Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}, \lambda \in \mathbb{C}$ und q ein Polynom vom Grad m. Dann hat die DGL*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = q(t)e^{\lambda t}$$

eine komplex-wertige Lösung der Form

$$x(t) = Q(t)e^{\lambda t}$$

mit einem Polynom Q vom Grad $m + d$, wobei d die Vielfachheit von λ als Wurzel des charakteristischen Polynoms p bezeichnet; insbesondere ist $d = 0$ im Fall $p(\lambda) \neq 0$.

Beweis. Wir schreiben p als Produkt von Linearfaktoren:

$$p(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Bezeichnet $D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ wieder den Ableitungsoperator $f \mapsto f'$, so folgt

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = ((D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_n)x)(t).$$

Nun setzen wir $x_0(t) := q(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$ und finden schrittweise für $j = 1, \ldots, n$ jeweils eine Lösung x_j der DGL $x'(t) - \lambda_i x(t) = x_{j-1}(t)$ wie im vorigen Lemma. Dann ist $x := x_n$ eine Lösung der DGL der gewünschten Form, weil

$$(D - \lambda_1) \cdots \underbrace{(D - \lambda_n)x_n}_{x_{n-1}} = \cdots = (D - \lambda_1)x_1 = x_0. \qquad \square$$

Beispiel 12.7 (Angeregter harmonischer Oszillator)**.** Wird im Beispiel 12.2 der Massepunkt zusätzlich durch eine periodisch wechselnde Beschleunigung $\cos \upsilon t$ mit $\upsilon \neq 0$ angeregt, so wird die Bewegung des Massepunktes durch die DGL

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = \cos \upsilon t = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{i\upsilon t} \tag{61}$$

beschrieben.

- *Fall $\upsilon \neq \pm\omega$:* Eine spezielle komplex-wertige Lösung der DGL $x''(t)+\omega^2 x(t) = \mathrm{e}^{i\upsilon t}$ erhalten wir mit dem Ansatz $x_p(t) = \alpha \mathrm{e}^{i\upsilon t}$, wenn

  $$\alpha(i^2\upsilon^2 + \omega^2)\mathrm{e}^{i\upsilon t} = \mathrm{e}^{i\upsilon t},$$

  also $\alpha = \frac{1}{\omega^2-\upsilon^2}$. Dann ist

  - eine reellwertige Lösung $\operatorname{Re} \frac{1}{\omega^2-\upsilon^2}\mathrm{e}^{i\upsilon t} = \frac{1}{\omega^2-\upsilon^2}\cos \upsilon t$;
  - die allgemeine reelle Lösung $x(t) = \alpha_1 \cos \omega t + \alpha_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega^2-\upsilon^2}\cos \upsilon t$ mit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;
  - die Lösung mit den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$ bestimmt durch die Koeffizienten α_1, α_2 mit

    $$0 = x(0) = \alpha_1 + \frac{1}{\omega^2 - \upsilon^2}, \qquad 0 = x'(0) = \omega\alpha_2,$$

    also

    $$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \upsilon^2}(\cos \upsilon t - \cos \omega t) = \cdots = \frac{2}{\omega^2 - \upsilon^2} \sin \frac{\upsilon - \omega}{2} t \cdot \sin \frac{\upsilon + \omega}{2} t;$$

    vgl. Abbildung 16.

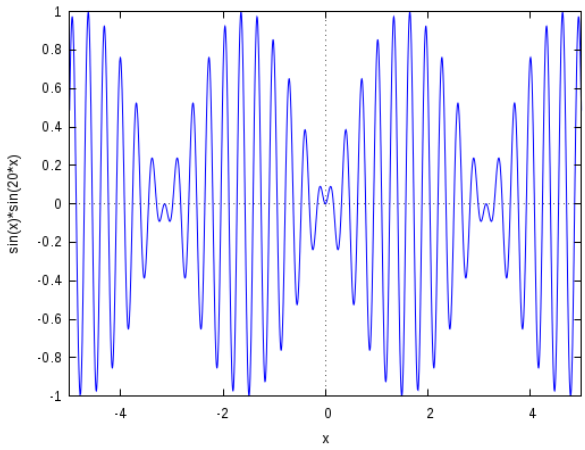


Abbildung 15: Periodisch angeregter harmonischer Oszillator

- *Fall $\upsilon = \omega$ (Resonanz)*: Da υ eine Wurzel des charakteristischen Polynoms ist, erhalten wir nun eine komplexwertige Lösung der DGL $x''(t) + \omega^2 x(t) = \mathrm{e}^{i\upsilon t}$ mit dem Ansatz $x_p(t) = \alpha t \mathrm{e}^{i\upsilon t}$, wenn

$$\alpha(i^2\upsilon^2 t + 2i\upsilon + \omega^2 t)\mathrm{e}^{i\upsilon t} = \mathrm{e}^{i\upsilon t},$$

also wenn $\alpha = \frac{1}{2i\upsilon}$. Dann ist eine reellwertige Lösung $x(t) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2i\upsilon} t\mathrm{e}^{i\upsilon t} = \frac{1}{2} t \sin \upsilon t$, und diese erfüllt die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$.

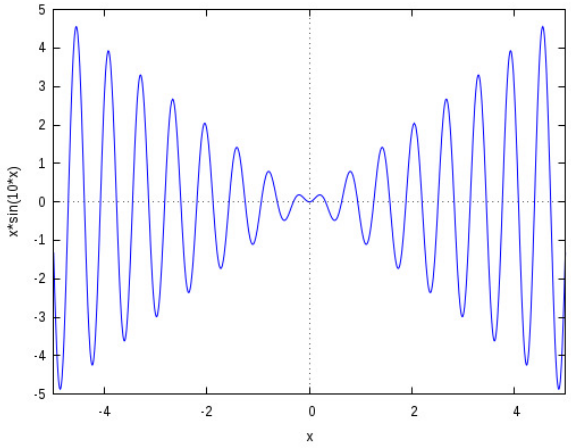


Abbildung 16: Angeregter harmonischer Oszillator mit Resonanz

Im Gegensatz zum obigen Fall wächst hier die Amplitude der Schwingung linear mit der Zeit. Dieses Phänomen ist von großer praktischen Bedeutung und beispielsweise dafür verantwortlich, dass

  - Geigentöne Weingläser zum Zerbrechen bringen können,
  - 1850 ein Bataillon im Gleichschritt marschierender Soldaten die Hängebrücke von Angers zum Einsturz brachte,
  - 1940 der Wind eine Brücke über die Tacoma-Schlucht vier Monate nach Einweihung zum Einsturz brachte,
  - durch Einstellung des Empfängers eines Analogradios auf die Frequenz eines Funksignales dieses verstärkt wiedergegeben werden kann.

Teil IV
Ausblick

13 Variationsrechnung

31.0.1.17

Eine wichtige Quelle und Anwendung von Differenzialgleichung sind sogenannte Variationsprobleme. Bevor wir sie mathematisch formulieren, geben wir ein paar klassische

Beispiele:

Beispiel 13.1.
1. *Kürzeste Verbindungskurve:* Gegeben sind zwei Punkte x und y auf einer gekrümmten Fläche im Raum. Was ist die kürzeste Verbindungsline zwischen den Punkten auf der Fläche?
2. *Minimalflächen:* Wir betrachten zwei zur y-z-Ebene parallele Ringe mit Radius A bzw. B mit Mittelpunkt in 0 bzw. 1. Wenn zwischen beiden Ringen eine Seifenhaut gespannt wird, welche Form nimmt diese an?
3. *Problem der Dido (900 v. Christi):* Was ist der maximale Flächeninhalt, den man mit einem Seil einer festen Länge umschließen kann?
4. *Problem der Brachistochrone:* Ein Massepunkt soll sich unter der Wirkung der Schwerkraft reibungsfrei von einem Punkt A nach B bewegen. Auf welcher Bahnkurve geht das am schnellsten?

All diese Beispiele lassen sich mathematisch wie folgt formulieren:

Gesucht ist eine stetige Funktion $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die

(V1) auf (a,b) differenzierbar ist,

(V2) in a und b vorgegebene Randwerte y_a bzw. y_b annimmt und

(V3) für die ein gewisses Integral

$$J(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))dt$$

(mit einer vorgegebenen Funktion f) extremal wird.

In den obigen Beispielen sieht die mathematische Formulierung wie folgt aus:

Beispiel 13.2.
1. Zur Vereinfachung betrachten wir einfach zwei Punkte (t_0, y_0) und (t_1, y_1) in der Ebene. Die kürzeste glatte Verbindung ist dann gegeben durch eine differenzierbare Kurve $y\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(t_0) = y_0$ und $y(t_1) = y_1$, für die die Kurvenlänge

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + y'(t)^2}dt$$

minimal wird.

2. Aus Symmetriegründen ist die entstehende Minimalfläche eine Rotationsfläche. Gesucht ist dann eine differenzierbare Kurve $y\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $y(0) = A$ und $y(1) = b$, für den der Flächeninhalt der Rotationsfläche minimal wird, und dieser ist

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{1 + y'(t)^2}dt.$$

3. Zur Vereinfachung fragen wir nach dem maximalen Flächeninhalt, den man mit einem Seil einer festen Länge L und der x-Achse einschließen kann, also nach einer differenzierbaren Kurve $y\colon [0,t] \to \mathbb{R}$ mit der Länge

$$\int_0^t \sqrt{1+y'(t)^2}dt = L,$$

für die der Flächeninhalt

$$\int_0^t y(t)dt$$

maximal wird.

4. Gesucht ist eine differenzierbare Kurve $y\colon [x_0,x_1] \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ und

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'(x)^2}{2g(y_1-y(x))}}dx$$

minimal wird, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Idee: Ist der Massepunkt in $(x,y(x))$ angekommen, so resultiert seine Geschwindigkeit $v(x)$ aus der Umwandlung der potentiellen Energie $mg(y_1-y(x))$ in die kinetische Energie $\frac{m}{2}v(x)^2$, beträgt also

$$v(x) = \sqrt{2g(y_1-y(x))}.$$

Von x bis $x+\delta$ wird dann die Wegstrecke

$$\sqrt{\delta^2+(y(x+\delta)-y(x))^2} = \delta\sqrt{1+\left(\frac{y(x+\delta)-y(x)}{\delta}\right)^2}$$

in der Zeit

$$\delta\sqrt{\frac{1+\left(\frac{y(x+\delta)-y(x)}{\delta}\right)^2}{2g(y_1-y(x))}}$$

zurückgelegt.

Um Lösungen eines Variationsproblems bestimmen, kann man folgendes Kriterium nutzen:

Satz 13.3. *Seien $a<b$ und $y_a, y_b \in \mathbb{R}$ gegeben,*

$$\mathcal{F} = \{y\colon [a,b] \to \mathbb{R} : y \text{ erfüllt (V1), (V2)}\}$$

und $J\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$J(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))dt$$

mit einer stetig partiell differenzierbaren Funktion f*. Nimmt* J *im Punkt* $y \in \mathcal{F}$ *ein Maximum/Minimum an, so erfüllt* y *die* Eulersche Differenzialgleichung

$$\partial_2 f(t, y(t), y'(t)) - \frac{d}{dt}\partial_3 f(t, y(t), y'(t)) = 0. \tag{62}$$

Beweis-Skizze. Sei $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $v(a) = v(b) = 0$. Wir betrachten die "Konkurrenzfunktionen"

$$y_s := y + sv \in \mathcal{F}$$

und sehen, dass die Funktion

$$j\colon s \mapsto J(y_s)$$

in $s = 0$ ein Extremum annimmt, also $j'(0) = 0$ erfüllt. Nun gilt aber

$$0 = j'(0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \int_a^b \underbrace{f(t, y(t) + sv(t), y'(t) + sv'(t))}_{=:g(t,s)} dt = \int_a^b \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g(t, s)dt$$

und

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=t} g(t, s) = \partial_2 f(t, y(t), y'(t))v(t) + \partial_3 f(t, y(t), y'(t))v'(t),$$

also

$$0 = \int_a^b (\partial_2 f(t, y(t), y'(t))v(t) + \partial_3 f(t, y(t), y'(t))v'(t))dt.$$

Nun können wir den zweiten Summanden partiell integrieren, wobei wegen $v(a) = v(b) = 0$ die Randterme wegfallen. Wir erhalten

$$0 = \int_a^b \left(\partial_2 f(t, y(t), y'(t))v(t) + \frac{d}{ds}\partial_3 f(t, y(t), y'(t))\right) v(t)dt.$$

Dies muss für beliebige v gelten und deswegen muss der Ausdruck in Klammern Null sein. □

03.02.17

Wir wenden nun dieses Kriterium auf die vorher betrachteten Beispiele an und bemerken dabei einige Spezialfälle:

Beispiel 13.4 (Kürzeste Verbindungslinie)**.** Hier war

$$f(t, y(t), y'(t)) = \sqrt{1 + y'(t)^2}$$

und die Eulersche DGL (62) ist dann

$$0 = 0 - \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1 + y'(t)^2}}\right).$$

Folgerung: Für die kürzeste Verbindung ist $t \mapsto \frac{y'(t)}{\sqrt{1+y'(t)^2}}$ konstant, somit auch y', die kürzeste Verbindung ist also (wenig überraschend) eine geradlinige Strecke.

In folgenden Fällen ist die Eulersche DGL äquivalent zu einer einfacheren Gleichung:

Lemma 13.5. *1. Hängt f nicht vom zweiten Argument ab, so ist die Eulersche DGL für eine Funktion y äquivalent dazu, dass $\partial_3 f(t, y(t), y'(t))$ konstant ist.*

2. Hängt f nicht vom ersten Argument ab und erfüllt y die Eulersche DGL, so ist $f(t, y(t), y'(t)) - y'(t)\partial_3 f(t, y(t), y'(t))$ konstant.

Beweis. (1) Klar.

(2) Der Ausdruck oben ist also konstant genau dann, wenn

$$0 = \frac{d}{dt}\left(f(t, y(t), y'(t)) - y'(t)\partial_3 f(t, y(t), y'(t))\right).$$

Wir rechnen die rechte Seite mit Kettenregel und Produktregel aus, verwenden die Annahme $\partial_1 f(t, y(t), y'(t)) = 0$, und erhalten

$$\partial_2 f(t, y(t), y'(t)) \cdot y'(t) + \partial_3 f(t, y(t), y'(t)) \cdot y''(t) \\ - y''(t)\partial_3 f(t, y(t), y'(t)) - y'(t)\frac{d}{dt}\partial_3 f(t, y(t), y'(t)). \quad \square$$

Beispiel 13.6 (Minimalfläche)**.** Hier war

$$f(t, y(t), y'(t)) = y(t)\sqrt{1 + y'(t)^2}.$$

Nach dem obigen Lemma ist die Eulersche DGL (62) äquivalent dazu, dass für ein $c \in \mathbb{R}$

$$c = y\sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot y\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y(1 + y'^2) - y'^2 y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

wobei wir kurz y, y', y'' für $y(t), y'(t), y''(t)$ geschrieben haben. Wir lösen diese Gleichung nach y' auf und erhalten

$$y'(t) = \sqrt{\frac{y(t)^2}{c^2} - 1}.$$

Diese DGL lösen wir durch Trennung der Variablen mit dem Anfangswert $y(0) = A$ und erhalten

$$\int_A^{y(t)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}} = \int_0^t 1 ds = t.$$

Das Integral links kann man mit Hilfe der hyperbolischen Winkelfunktionen $\cosh u = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})$ und $\sinh u = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u})$ durch die Substitution $z = c \cosh u$ lösen; wegen $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ folgt

$$\frac{dz}{du} = c \sinh u = \sqrt{z^2 - c^2}$$

und damit

$$t = \int_A^{y(t)} \frac{dz}{\sqrt{\frac{z^2}{c^2} - 1}} = \int_{\operatorname{arcosh} \frac{A}{c}}^{\operatorname{arcosh} \frac{y(t)}{c}} c \, du = c \left(\operatorname{arcosh} \frac{y(t)}{c} - \operatorname{arcosh} \frac{A}{c} \right)$$

und schließlich

$$y(t) = c \cosh \left(\frac{t}{c} + \operatorname{arcosh} \frac{A}{c} \right).$$

Die Konstante c bestimmt man nun aus der Randbedingung $y(1) = B$. Die obige Funktion y heißt auch *Kettenlinie*, weil eine Kette der passenden Länge genau so hängt, wie der Graph von y verläuft, wenn man sie in den Punkten $(0, A)$ und $(0, B)$ einspannt.

Beispiel 13.7 (Brachistochrone)**.** Hier empfiehlt sich eine Umparametrisierung: statt y ist es einfacher, $z := y_1 - y$ zu betrachten. Dann ist

$$f(t, y(t), y'(t)) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2g(y_1 - y(x))}} = \sqrt{\frac{1 + z'(x)^2}{2gz(x)}}$$

und eine ähnliche Rechnung wie im vorigen Beispiel zeigt, dass hier die Eulersche DGL äquivalent dazu ist, dass

$$\frac{1}{\sqrt{(1 + z'^2) 2gz}}$$

konstant ist, also

$$(1 + z'^2) z = c$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ beziehungsweise

$$z'(x) = \sqrt{\frac{c}{z(x)} - 1} = \sqrt{\frac{c - z(x)}{z(x)}}.$$

In dieser DGL kann man die Variablen trennen, aber die zu bildenden Integrale nicht durch bekannte spezielle Funktionen darstellen; insgesamt kann diese DGL nicht durch bekannte spezielle Funktionen gelöst werden.

Man kann aber die Lösungskurve parametrisieren; sie entspricht dann einer sogenannten Zykloide, die ein Punkt auf einem Rad beschreibt, wenn das Rad auf der x-Achse rollt.