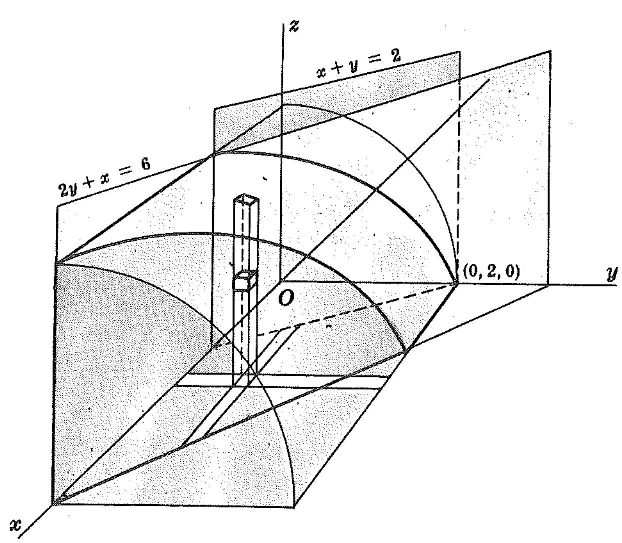
Aufgabenübersicht

Aufgabe 1 (3 Pkt.)

Bestimmen Sie die Masse des Körpers, der im ersten Oktanten durch die vier Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ und den Zylinder $y^2 + z^2 = 4$ begrenzt wird, wenn die Dichte an der Stelle (x, y, z) gleich z ist. Integrieren Sie dazu in der Reihenfolge $\int\int\int \cdots dz\, dx\, dy$ mit gegeeigneten Grenzen.



Aufgabe 2 (3.5+2.5 Pkt.)

(a) Berechnen Sie direkt den Fluss des Vektorfeldes $F(x, y, z) = (x, -y, z)$ durch die Oberfläche des Zylinders $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq z \leq 5\}$.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals aus (a) mit Hilfe eines passend gewählten (3-dimensionalen) Volumenintegrals und geben Sie den dabei verwendeten Satz aus der Vorlesung wieder.

Aufgabe 3 (2+1+3 Pkt.)

(a) Bestimmen Sie die Residuen der rationalen Funktion $P(z) = \dfrac{4z}{z^4 + 14z^2 + 1}$ an allen Polstellen, die innerhalb des Einheitskreises liegen.

(b) Zeigen Sie: $zP(z) = \dfrac{1}{3 + \frac{1}{4}\left(z + z^{-1}\right)^2}$.

(c) Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert durch $t \mapsto \mathrm{e}^{it}$. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos^2\theta} = \frac{1}{i}\int_\gamma P$, und berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 4 (1+3 Pkt.)

Gegeben ist das Anfangswertproblem $x^2\cos(xy)y' + xy\cos(xy) + \sin(xy) = 0$ mit $y(1) = \frac{\pi}{6}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung exakt ist.

(b) Bestimmen Sie eine Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Aufgabe 5 (1+2.5+2.5 Pkt.)

Gegeben ist das Anfangswertproblem $(x^2+1)y' + 2xy = 0$ mit $y(0) = 1$.

(a) Sei y eine Lösung des Anfangswertproblems. Welchen Wert muss $y'(0)$ dann haben?

(b) Finden Sie eine Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, die das Anfangswertproblem löst, und bestimmen Sie deren Konvergenzradius.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem durch Trennung der Variablen und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lösung aus (b).