Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

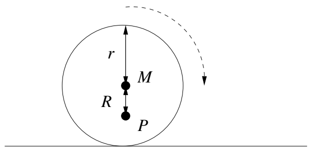
Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

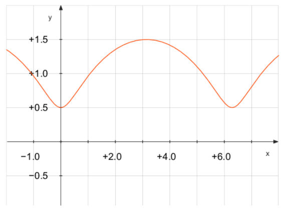
Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 1, Abgabe bis ??. Oktober 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Bogenlänge einer Kurve)*

Ein Rad mit Radius r rolle auf der x-Achse in der xy-Ebene, hierbei bewege sich der Mittelpunkt des Rades mit der konstanten Geschwindigkeit v. Ferner sei P ein fest mit dem Rad verbundener Punkt im Abstand R von M, wobei $0 \leq R \leq r$. Die Punkte P und M befinden sich zur Zeit $t = 0$ auf der y-Achse und P liege unterhalb von M.





(a) Beschreiben Sie die Bahn γ von P als Funktion der Zeit t.

(b) Welche Bogenlänge besitzt γ für $r = R$ nach einer Radumdrehung? (*Hinweis:* Nutzen Sie die Gleichung $\cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$.)

Präsenzaufgabe 2. *(Arbeitsintegrale und Potentialfelder)*

Seien $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^\alpha \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha > 1.$$

(a) Berechnen Sie $\int \langle f, d\gamma \rangle$ und $\int \langle g, d\gamma \rangle$.

(b) Welche der Funktionen f, g besitzt ein Potential? Bestimmen Sie ein solches, falls es existiert.

Aufgabe 3. *(Bogenlängen von Kurven)*

(a) Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\omega(t) \\ r(t)\sin\omega(t) \end{pmatrix}$$

mit stetig differenzierbaren Polarkoordinaten $r, \omega\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Bogenlänge $\ell(t)$ von γ dann gegeben ist durch

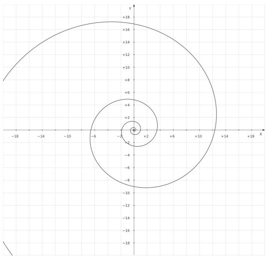
$$\ell(t_0) = \int_a^{t_0} \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2\omega'(t)^2}\mathrm{d}t.$$

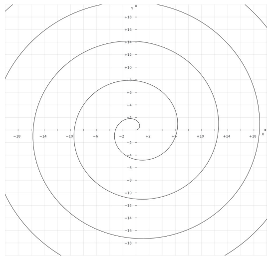
— *Fortsetzung auf nächster Seite* —

(b) Die *logarithmische* und die *archimedische* Spirale sind gegeben durch

$$\gamma_L\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos t \\ e^{\alpha t}\sin t \end{pmatrix}, \qquad \gamma_A\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha > 0$. Bestimmen Sie die Bogenlänge $\ell(t)$ für γ_L und die Funktion $\ell(\sinh x)$ in Abhängigkeit von $x \in [0,\infty)$ für γ_A.


Logarithmische Spirale


Archimedische Spirale

Aufgabe 4. *(Bestimmung von Potentialfeldern)*

Prüfen Sie, ob die folgenden Kraftfelder ein Potential besitzen, und bestimmen Sie im positiven Fall ein solches:

(a) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y\sin z \\ x\sin z \\ xy\cos z \end{pmatrix}.$
(*Hinweis:* Sie dürfen raten und die Lösung dann überprüfen.)

(b) $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{v} \mapsto \ln(1+\|\vec{v}\|^2)\vec{v}.$
(*Hinweise:* Verwenden Sie die Formel $U(\vec{v}) = \int_{\gamma_{\vec{v}}} \langle G, d\gamma_{\vec{v}}\rangle$ mit $\gamma_{\vec{v}}(t) = t\vec{v}$ sowie $\int \ln t\,\mathrm{d}t = t(\ln t - 1) + c$.)