Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 3, Abgabe bis 6. November 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Kugelkoordinaten im Raum)*

(a) Die n-dimensionale *Polarkoordinaten-Transformation* $T_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist rekursiv definiert durch

$$T_2 \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{pmatrix}, \quad T_n \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta_{n-2} \cdot T_{n-1} \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \end{pmatrix} \\ \cos\theta_{n-2} \cdot r \end{pmatrix} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Geben Sie T_3 und T_4 explizit an und berechnen Sie $\det T_3'(r, \phi, \theta_1)$.

(b) Bestimmen Sie die Masse einer Kugel vom Radius R, wenn sich die Dichte reziprok dem Quadrat des Abstands vom Mittelpunkt verändert.

Aufgabe 2. *(Guldinsche Regel und das Volumen des Torus)*

(a) Seien $a < b$ und $f, g \colon [a, b] \to [0, \infty)$ stückweise stetig differenzierbar mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Bezeichne

- V das Volumen des Rotationskörpers

$$\{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 : f(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq g(x)\},$$

- A den Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g,
- U den Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Fläche zwischen den Graphen bei der Rotation um die x-Achse beschreibt.

Beweisen Sie die *zweite Guldinsche Regel* $V = AU$.

(b) Seien $R > r > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Voll-Torus

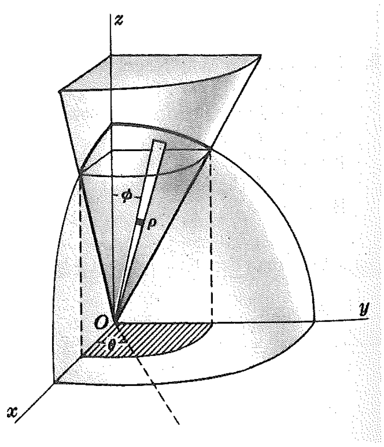
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (\sqrt{y^2 + z^2} - R)^2 \leq r^2\}.$$

Aufgabe 3. *(Kugelkoordinaten im Raum)*

Wir betrachten den Körper K, der von einem Viertel eines Kegels vom Winkel $60°$ (siehe Bild) durch die Kugel vom Radius $r = 2$ abgeschnitten wird, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist:

Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de



Bestimmen Sie das Volumen und die z-Koordinate des Schwerpunktes von K.

Aufgabe 4. *(Flächeninhalt des Graphen einer Funktion zweier Variablen)*

(a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $K \subseteq U$ kompakt und $F\colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar von der Form $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3(x_1, x_2))$. Zeigen Sie:

$$A(F(K)) = \int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2}\, \mathrm{d}x.$$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Teiles vom Kegel $x^2+y^2 = 3z^2$, der oberhalb der x,y-Ebene und innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 4y$ liegt (siehe Skizze). Verwenden Sie dazu die Projektion auf die x,y-Ebene und (a).