Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 4, Abgabe bis 13. November 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Rechnen mit Differenzialformen)*

Gegeben seien die Differenzialformen

$$\omega = xydx + \mathrm{e}^x dy + yzdz,$$
$$\upsilon = z^2 dx \wedge dy + dx \wedge dz + \cos x \cdot dy \wedge dz$$

und die Vektorfelder $F\colon (x, y, z) \mapsto (1,\ x,\ 0)^\top$ sowie $G\colon (x, y, z) \mapsto (y,\ z,\ -1)^\top$. Berechnen Sie

(a) die Funktionen $\omega(F)$ und $\upsilon(F, G)$;

(b) das Keilprodukt $\omega \wedge \upsilon$;

(c) die äußeren Ableitungen $d\omega$ und $d\upsilon$.

Aufgabe 2. *(Rechenregeln für Divergenz, Rotation und Gradient)*

Divergenz, Rotation und Gradient eines Vektorfeldes F bzw. einer Funktion f im 3-dimensionalen Raum sind definiert als

$$\operatorname{div} F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3, \quad \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^\top$$

und können suggestiv in der Form $\operatorname{div} F = \langle \nabla, F \rangle$, $\operatorname{rot} F = \nabla \times F$, $\operatorname{grad} f = \nabla f$ mit $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ geschrieben werden. Seien nun $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ sowie $F, G\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \qquad \operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F + (\operatorname{grad} f) \times F,$$
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0, \qquad \operatorname{div}(F \times G) = \langle \operatorname{rot} F, G \rangle - \langle F, \operatorname{rot} G \rangle.$$

Aufgabe 3. *(Differenzialformen im $\mathbb{R}^3$ und Divergenz, Rotation und Gradient)*

Wir betrachten Vektoren mit drei Differenzialformen als Komponenten, also beispielsweise Vektorfelder $U \to \mathbb{R}^3$ (deren Einträge Funktionen und somit Differenzialformen der Ordnung 0 sind) oder

$$dX := (dx_1, dx_2, dx_3)^\top, \qquad dS := (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)^\top.$$

Für solche Vektoren $\omega = (\omega_i)_i$, $\upsilon = (\upsilon_i)_i$ definieren wir $\langle \omega, \upsilon \rangle := \sum_{i=1}^n \omega_i \wedge \upsilon_i$ (dies ergibt eine Differenzialform und keine Zahl). Für ein Vektorfeld F mit Komponenten F_1, F_2, F_3 wäre dann also

$$\langle F, dX \rangle = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3, \quad \langle F, dS \rangle = F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Schliesslich sei $dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Zeigen Sie, dass für alle Vektorfelder F, G, H und Funktionen f gilt:

$$\begin{gathered}
\langle F, dX\rangle \wedge \langle G, dX\rangle = \langle F \times G, dS\rangle, \\
\langle F, dX\rangle \wedge \langle G, dS\rangle = \langle F, G\rangle dV, \\
\langle F, dX\rangle \wedge \langle G, dX\rangle \wedge \langle H, dX\rangle = \det(F\,G\,H) dV, \\
df = \langle \mathrm{grad}(f), dX\rangle, \quad d\langle F, dX\rangle = \langle \mathrm{rot}(F), dS\rangle, \quad d\langle G, dS\rangle = \mathrm{div}(G) dV.
\end{gathered}$$

Aufgabe 4. *(Integration von Differenzialformen)*

Seien $a, b > 0$ und

$$\begin{aligned}
M &= \left\{ (x, y, x+y) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3, \\
\omega(x, y) &= y \mathrm{d}x - x \mathrm{d}y + x \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Wir versehen M mit der normalen Orientierung, dann wird ∂M bei Projektion auf die x, y-Ebene dem Uhrzeigersinn entegegen orientiert. Berechnen Sie

(a) das Integral $\int_{\partial M} \omega$ mit Hilfe der Parametrisierung $\gamma \colon t \mapsto (a \cos t,\ b \sin t, a \cos t + b \sin t)$ und der Formel

$$\int_{\partial M} \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) \mathrm{d}t$$

(hier bezeichnet $\omega(\gamma(t))(\gamma'(t))$ die Differenzialform ω an der Stelle $\gamma(t)$ angewendet auf den Vektor $\gamma'(t)$);

(b) das Integral $\int_M \mathrm{d}\omega$ unter Verwendung der Parametrisierung $\Phi \colon (x, y) \mapsto (x, y, x+y)$ und der Formel

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\Phi^{-1}(M)} \mathrm{d}\omega(\Phi(x, y)) \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}(x, y).$$