Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 5, Abgabe bis 20. November 12 Uhr

Ein $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heiße *schön*, wenn es beschränkt, orientiert, abgeschlossen und glatt berandet ist.

Präsenzaufgabe 1. *(Beispiele zum Integralsatz)*

(a) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ schön. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_{\partial M} -y dx = \int_{\partial M} \mathrm{x} \mathrm{dy} = \frac{1}{2} \int_{\partial M} -\mathrm{y}\mathrm{dx} + xdy.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel den Flächeninhalt des Kreises mit Radius r.

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ schön und u eine glatte Funktion auf einer Umgebung von M. Beweisen Sie die folgende Greensche Formel:

$$\int_M \Delta(u) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial M} \partial_x(u) dy \wedge dz + \partial_y(u) dz \wedge dy + \partial_z(u) dx \wedge dy,$$

wobei $\Delta(u) = \sum_i \partial_{x_i}^2 u$.

Aufgabe 2. *(Integralsatz und Maxwellsche Gleichung)*

(a) Seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ schön und u, v glatte Funktionen auf einer Umgebung von M mit $g|_{\partial M} \equiv 0$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\int_M \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = - \int_M f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ schön. Finden Sie eine (möglichst einfache und bezüglich der Rollen von x, y, z symmetrische) 2-Form ω mit

$$\mathrm{Vol}(M) = \int_{\partial M} \omega.$$

(c) Wir bezeichnen mit x, y, z, t die Koordinaten des $\mathbb{R}^4$ und mit E_x, E_y, E_z und B_x, B_y, B_z jeweils die Komponenten des elektrischen beziehungsweise magnetischen Feldes und

$$\boldsymbol{F} = \langle B, dS \rangle + \langle E, dX \rangle \wedge dt$$

(siehe Aufgabe 3 von Blatt 4). Zeigen Sie, dass $d\boldsymbol{F} = 0$ genau dann gilt, wenn $\operatorname{div} B = 0$ und $\operatorname{rot} E = -\partial_t B$.

Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Aufgabe 3. *(Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren)*

Sei H ein Hilbertraum. Das *Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren* ordnet gegebenen linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in H$ schrittweise für $k = 1, \ldots, n$ die Vektoren

$$e_k := w_k / \|w_k\| \quad \text{mit} \quad w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k} \langle v_k, e_i \rangle e_i$$

zu. Zeigen Sie per Induktion, dass $(e_1, \ldots, e_n)$ ein Orthonormalsystem ist und die Mengen $\{v_1, \ldots, v_k\}$ und $\{e_1, \ldots, e_k\}$ für $k = 1, \ldots, n$ dieselbe lineare Hülle haben.

Aufgabe 4. *(Orthogonalität der Legendre-Polynome)*

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren auf die Polynome $1, X, X^2$, betrachtet als Vektoren des Hilbertraumes $L^2([-1,1])$, an und zeigen Sie, dass die erhaltenen Vektoren gerade die *Legendre-Polynome*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

für $n = 0, 1, 2$ sind.