Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 6, Abgabe bis 27. November 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Fourier-Reihen)*

Wir betrachten den Hilbertraum $L^2([-\pi,\pi])$ mit dem Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$. Seien $f, e_n \in C([-\pi,\pi])$ definiert durch

$$f(x) = x, \qquad e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{inx} \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{Z}, x\in[-\pi,\pi].$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_n := \langle f, e_n\rangle$ für alle $n\in\mathbb{Z}$.

(b) Welche Reihe für π^2 ergibt sich aus der Gleichung $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$?

Aufgabe 2. *(Plancherel-Formel für die Fourier-Transformation)*

Es seien $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stetig und $\|f\|_1, \|g\|_1 < \infty$.

(a) Die *Faltung* $f*g$ ist definiert durch $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds$ und erfüllt $\|f*g\|_1 < \infty$. Zeigen Sie, dass für alle $\omega\in\mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}(f*g))(\omega) = (\mathcal{F}f)(\omega)(\mathcal{F}g)(\omega).$$

Vertauschen Sie dazu auf der linken Seite die Integrationsreihenfolge und substituieren Sie geeignet.

(b) Sei f^* definiert durch $f^*(t) := \overline{f(-t)}$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$(f*f^*)(0) = \|f\|_2^2, \qquad (\mathcal{F}^{-1}(f\overline{f}))(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_2^2,$$

wobei $f\overline{f}$ die Funktion $t\mapsto f(t)\overline{f(t)} = |f(t)|^2$ bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(f^*) = \overline{\mathcal{F}f}$ gilt.

(d) Wenden Sie $\mathcal{F}^{-1}$ auf die Gleichung in (a) mit $g = f^*$ an und folgern Sie, dass

$$\|f\|_2^2 = \|\mathcal{F}f\|_2^2,$$

die Fourier-Transformation also isometrisch bezüglich der L^2-Norm ist.

Aufgabe 3 *(Fourier-Reihen und DGL mit konstanten Koeffizienten)*

Wir betrachten eine Differenzialgleichung der Form

$$f^{(d)}(t) + \lambda_{d-1}f^{(d-1)}(t) + \cdots + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) = g(t)$$

mit einer stetigen 2π-periodischen Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ und Koeffizienten $\lambda_0,\ldots,\lambda_{d-1}\in\mathbb{C}$. Das *charakteristische Polynom* χ dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\chi(x) = x^d + \lambda_{d-1}x^{d-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0.$$

Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

(a) Zeigen Sie, dass für jede 2π-periodische, stetig differenzierbare Funktion f und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $\widehat{f'}_n = in\widehat{f}_n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten von g und jeder 2π-periodischen Lösung f folgende Gleichung erfüllen:

$$\chi(in)\hat{f}_n = \hat{g}_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

(c) Bestimmen Sie die allgemeine zweimal stetig differenzierbare 2π-periodische Lösung der DGL

$$f''(t) - f(t) = \cos(4t).$$

Aufgabe 4. *(Komplexe Kurvenintegrale)*

Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale:

(a) $\int_\gamma \overline{z} \mathrm{d}z$ mit $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = \mathrm{e}^{(i+1)t^2}$;

(b) $\int_\gamma (x^2 - iy^2) \mathrm{d}z$ mit $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = (t+1) + 2i(t+1)^2$.