Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 7, Abgabe bis 04. Dezember 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen)*

(a) Bestimmen Sie jeweils alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = z - \overline{z}^2 \quad \text{und} \quad g(z) = |z|^4 - 2|z|^2$$

komplex differenzierbar sind.

(b) Finden Sie eine holomorphe Funktion $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$, mit $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$. (Erraten ist erlaubt.)

Aufgabe 2. *(Cauchysche Integralformel)*

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\partial K_1(1)} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$, (b) $\displaystyle\int_{\partial K_1(i\pi)} \frac{\exp(z)}{(z-\pi i)^2 z} dz$, (c) $\displaystyle\int_{\partial K_2(2i)} \frac{\cos(z)^2 - \sin(z)^2}{(z-2i)(z+3i)} \mathrm{d}z$.

Aufgabe 3. *(Cauchysche Integralformel und das Maximumsprinzip)*

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z \in U$ und $r > 0$ mit $K_r(z) \subseteq U$ sowie

$$g(t) := f(z + re^{it}) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Die Fourier-Koeffizienten $\hat{g}_k$ von g seien definiert wie im reellen Fall. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\hat{g}_k = 0$ für $k \leq -1$ und $\hat{g}_k = \dfrac{r^k\sqrt{2\pi}}{k!} f^{(k)}(z)$ für $k \geq 0$.

(b) Ist $|f(z)| \geq |g(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so folgt $\hat{g}_k = 0$ für alle $k \neq 0$.
(*Hinweis:* Verwenden Sie die Parsevalsche Gleichung $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_k|^2 = \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt$.)

(c) Ist $|f(z)| \geq |g(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist f auf $K_r(z)$ konstant. (*Hinweis:* Satz 10.)

Aus (c) folgt das *Maximumsprinzip*: Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und hat $|f|$ in U ein lokales Maximum, so ist f konstant.

Aufgabe 4. *(Anwendungen des Satzes von Liouville)*

(a) Es seien f, g ganze Funktionen und $|g(z)| \leq a|f(z)|$ sowie $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und ein festes $a > 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $b \in \mathbb{C}$ existiert mit $g(z) = bf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es sei f eine ganze Funktion und $|f(z)| \leq A|z| + B$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und gewisse $A, B > 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und gewisse $a, b \in \mathbb{C}$. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Abschätzung aus dem Beweis des Satzes von Liouville.)