Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 8, Abgabe bis 11. Dezember 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Anwendung des Residuensatzes auf ein unbestimmtes Integral)*

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 5z^2 + 4}.$$

Bestimmen Sie

(a) Lage und Vielfachheiten aller Polstellen von f,

(b) die Residuen von f an den Polstellen in der oberen Halbebene,

(c) das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Aufgabe 2. *(Bestimmung von Residuen)*

Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{res}_1 \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z-1)^2} = 2\mathrm{e}^2$;

(b) $\mathrm{res}_0 \frac{z^2+2}{\sin z} = 2$;

(c) Für jede Nullstelle ω des Polynoms $h(z) = 1 + z^4$ gilt $\mathrm{res}_\omega \dfrac{1}{h(z)} = -\dfrac{1}{4}\omega$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie die Formel für Residuen von Quotienten.)

(d) $\mathrm{res}_0 \frac{z}{1-\cos z} = 2$. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Formel für Residuen an k-fachen Polen: $\mathrm{res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$.)

Aufgabe 3. *(Berechnung unbestimmter Integrale mit dem Residuensatz)*

Zeigen Sie:

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}.$$

Aufgabe 4. *(Integral einer rationalen Funktion in $\cos z$ und $\sin z$)*

In mehreren Schritten soll gezeigt werden:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} = \pi\sqrt{8}.$$

Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

(a) Schreiben Sie dazu den Integranden in der Form $R(\cos\theta, \sin\theta)$ mit einer rationalen Funktion R zweier Variablen, und zeigen Sie für die Hilfsfunktion

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2i}\right)$$

die Gleichung $\tilde{R}(z) = \dfrac{8z^3}{z^8 + 6z^4 + 1}$.

(b) Bestimmen Sie die Pole von $\tilde{R}$, die im Einheitskreis liegen, und zeigen Sie, dass an jedem dieser Pole das Residuum gleich $1/\sqrt{8}$ ist.

(c) Schlussfolgern Sie die eingangs behauptete Gleichung für das Integral.