Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 9, Abgabe bis 18. Dezember 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Beispiel einer Picard-Lindelöf-Iteration)*

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x)x \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

und die durch die Picard-Lindelöf-Iteration gebildeten Näherungslösungen $y_0, y_1, \ldots$:

$$y_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(\xi)\xi \, \mathrm{d}\xi.$$

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem durch Trennung der Variablen.

(b) Berechnen Sie y_1, y_2, y_3 und erraten Sie eine allgemeine Formel für $y_n(x)$ der Form $y_n(x) = 1 + \alpha_1 x^2 + \cdots + \alpha_n x^{2n}$ mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Aufgabe 2. *(Nochmal Picard-Lindelöf-Iteration)*

Wir betrachten zunächst das AWP und die Näherungslösungen y_n aus Aufgabe 1.

(a) Finden Sie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ so, dass $y_n(x) = 1 + \alpha_1 x^2 + \cdots + a_n x^{2n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie diese Gleichheit per Induktion über n.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen y_n auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig gegen die Lösung konvergieren, also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |y_n(x) - \mathrm{e}^{x^2/2}| = 0$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt. Bestimmen Sie außerdem $\sup_{x\in\mathbb{R}} |y_n(x) - \mathrm{e}^{x^2/2}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten nun die Abbildung $T\colon C([1,2]) \to C([1,2])$, definiert durch

$$(Ty)(x) := 1 + \int_1^x \frac{y(\xi)}{2\xi} d\xi \quad \text{für alle } x \in [1,2], y \in C([1,2]).$$

(c) Welche DGL ergibt sich für jede Lösung y der Fixpunktgleichung $y = T(y)$ nach Ableiten bezüglich x?

(d) Bestimmen Sie die Lösung y dieser DGL und der Fixpunktgleichung $y = T(y)$.

Aufgabe 3. *(Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung)*

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}$ eine einfache Nullstelle von f (d.h. $f(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$) und $J := \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \neq 0\}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $N\colon J \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

(b) Zeigen Sie, dass es ein $\beta > 0$ gibt mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$.

(c) Zeigen Sie, dass es ein $\gamma \in (0, \beta)$ gibt mit $|N'(x)| \leq \frac{1}{2}$ für alle $x \in [x_0 - \gamma, x_0 + \gamma]$.

(d) Sei $I = [x_0 - \gamma, x_0 + \gamma]$ wie in (c). Zeigen Sie, dass $N(x) \in I$ für jedes $x \in I$ und $\lim_{n\to\infty} N^n(x) = x_0$ jedes $x \in I$. (*Hinweis:* Mittelwertsatz und Banachscher Fixpunktsatz.)

Aufgabe 4. (*Das Heron-Verfahren*)

(a) Sei $a > 0$ gegeben. Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = x^2 - a$ die zugehörige Abbildung N aus Aufgabe 3(a).

(b) Zeigen Sie, dass $N(x) - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 \geq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

(c) Zeigen Sie, dass für $x > \sqrt{a}$ stets $N(x) - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2}(x - \sqrt{a})$ gilt.

(d) Folgern Sie, dass für *alle* $x \in (0, \infty)$ die Folge $(N^n(x))_n$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.