Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 10, Abgabe bis 8. Januar 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Lineares AWP zu einem Mischprozess)*

Ein Tank enthalte w_0 Liter Wasser, in dem y_0 kg Salz gelöst sind. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ sollen ständig pro Minute

- α Liter der Lösung ausfließen und
- $\alpha + \beta$ Liter Wasser mit einem Salzgehalt von γ kg zufließen.

Ein Superrührgerät mischt alles sofort und vollständig durcheinander. Bestimmen Sie

(a) die Wassermenge $w(t)$ im Tank zum Zeitpunkt $t > 0$ in Litern;

(b) eine DGL für den Salzgehalt $y(t)$ im Tank zum Zeitpunkt t in Kilogramm;

(c) die Lösung der homogenen DGL $y_h'(t) = -\frac{\alpha}{w_0+\beta t} y_h(t)$.

Aufgabe 2. *(Fortsetzung Mischprozess, inhomogene Lösung)*

Bestimmen Sie für den Fall $\alpha \neq \beta$ die Lösung der inhomogenen DGL

$$y'(t) = \gamma - \frac{\alpha}{w_0 + \beta t} y(t) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0.$$

Aufgabe 3. *(Eine anwendungsnahe lineare DGL)*

Ein Pferd läuft in x-Richtung bei $x = l > 0$ mit konstanter Geschwindigkeit v_p los. Ein beliebig dehnbares homogenes Band ist mit einem Ende im Nullpunkt und mit dem anderem am Pferd befestigt. Eine Schnecke beginnt gleichzeitig mit dem Pferd im Nullpunkt mit konstanter Eigengeschwindigkeit v_s auf dem Band zu laufen (und wird durch die Dehnung des Bandes zusätzlich befördert).

(a) Stellen Sie eine Differenzialgleichung für den Ort der Schnecke in Abhängigkeit von der Zeit auf.
(*Zur Kontrolle:* Für den Ort x_s der Schnecke ergibt sich die lineare DGL $x_s'(t) = v_s + x_s(t)\frac{v_p}{tv_p+l}$ mit $x_s(0) = 0$.)

(b) Lösen Sie diese lineare Differenzialgleichung.

(c) Wird die Schnecke das Pferd erreichen? Geben Sie den Zeitpunkt davon in Abhängigkeit von v_p, v_s und l an. (An der Langlebigkeit der Tiere bestehe kein Zweifel.)

— bitte wenden! —

Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Aufgabe 4. *(Potenzreihenlösungen)*

Wir betrachten die DGL

$$y''(x) - 2xy'(x) + 4y(x) = 0.$$

(a) Welche Rekursionsgleichung müssen die Koeffizienten a_n einer Lösung der Form $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ erfüllen?

(b) Zeigen Sie direkt, dass die sich ergebende Potenzreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten a_n für die Lösung des AWP $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ gegeben sind durch

$$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n+1} = -\frac{1}{n!(2n+1)(2n-1)}.$$