Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 3

Übungsblatt 11, Abgabe bis 15. Januar 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Modifizierter Potenzreihenansatz / die Methode von Frobenius)*

Wir betrachten die Differenzialgleichung

$$y''(x) - \frac{2}{x}y'(x) + 9x^4 y(x) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass der modifizierte Potenzreihenansatz $y(x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ auf die Rekursionsgleichung

$$(\alpha + n)(\alpha + n - 3)a_n = -9a_{n-6}$$

führt, wobei $a_n = 0$ für $n < 0$ zu setzen ist.

(b) Welche Bedingung ergibt sich für α aus der Bedingung $a_{-6} = 0$?

(c) Bestimmen Sie die Lösung, die sich mit dem α aus (b) und dem Startwert $a_0 = 1$ ergibt. Schreiben Sie die Lösung mit Hilfe der Winkelfunktionen.

Aufgabe 2. *(Exakte Differenzialgleichungen)*

Gegeben ist die DGL

$$(x^2 + y(x)) - xy'(x) = 0, \quad x > 0.$$

(a) Ist die DGL auf exakt, also von der Form $y'(x)g(x, y(x)) + h(x, y(x)) = 0$ mit $\partial_x g(x, y) = \partial_y h(x, y)$ für alle $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ (vgl. Kurzskript S. 55/56)?

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $\mu\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, für welche die DGL

$$(x^2 + y(x))\mu(x) - x\mu(x)y'(x) = 0$$

exakt wird. (*Hinweis:* Welche (lineare) DGL muss μ erfüllen?)

(c) Bestimmen Sie eine Funktion $U\colon (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial_x U(x, y) = (x^2 + y)\mu(x) \quad \text{und} \quad \partial_y U(x, y) = -x\mu(x)$$

durch Integration von $(1, 0)$ nach (x, y) entlang achsenparalleler Strecken.

(d) Lösen Sie die gegebene DGL mit Hilfe des Ansatzes $U(x, y(x)) \equiv C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. *(Art von Gleichgewichtspunkten einer linearen DGL)*

Wir betrachten das von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Anfangswertproblem

$$y'(x) = y(x)(\alpha + \sin(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x \mapsto y(x; x_0, y_0)$ des Anfangswertproblems. (*Zur Probe:* $y(x; x_0, y_0) = y_0 \exp(\alpha(x - x_0) - \cos(x) + \cos(x_0))$.)

(b) Zeigen Sie: Der Gleichgewichtspunkt $y \equiv 0$ ist

i) im Fall $\alpha = 0$ stabil, es gilt also

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall y_0 \in (-\delta, \delta) : \sup_{x \in [0,\infty)} |0 - y(x; 0, y_0)| < \epsilon;$$

ii) im Fall $\alpha < 0$ asymptotisch stabil, es gilt also

$$\forall y_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x \to \infty} |0 - y(x; 0, y_0)| = 0;$$

iii) im Fall $\alpha > 0$ instabil, es gilt also

$$\forall \delta > 0 \, \exists y_0 \in (-\delta, \delta) : \sup_{x \in [0,\infty)} |0 - y(x; 0, y_0)| > 1.$$

Aufgabe 4. *(Eine Linearisierung)*

Bestimmen Sie für das DGL-System

$$\dot{x} = xy + 1, \qquad \dot{y} = x + y$$

(a) die Gleichgewichtspunkte,

(b) die jeweiligen Linearisierungen in den Gleichgewichtspunkten,

(c) die Eigenwerte der zugehörigen Matrizen,

(d) welche der Gleichgewichtspunkte hyperbolisch und instabil/asymptotisch stabil sind.

(*Zur Erinnerung:* Die Linearisierung eines DGL-Systems $y' = F(y)$ in $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist das DGL-System $y' = F(y_0) + F'(y_0)y$. Ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist *instabil*, wenn $F'(y_0)$ einen Eigenwert mit positivem Realteil besitzt, und sonst *asymptotisch stabil.*)