Wend Werner
wwerner@uni-muenster.de

Thomas Timmermann
timmermt@uni-muenster.de

Mathematik für Physiker 2

Übungsblatt 6, Abgabe bis 2. Juni 12 Uhr

Präsenzaufgabe 1. *(Basiswechsel-/Transformationsmatrizen)*

Sei V ein Vektorraum mit Basen $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ und $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ und sei $T = (t_{ij})_{i,j}$ die zugehörige Basiswechsel- bzw. Transformationsmatrix, also

$$\vec{c}_i = \sum_j t_{ij}\vec{b}_j \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

(a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix im Fall

$$V = \mathbb{R}^3, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

(b) Sei $V = \mathbb{R}^n$ und B die Standard-Basis. Zeigen Sie, dass dann $T^\top = (\vec{c}_1 \ \dots \ \vec{c}_n)$.

(c) Bezeichne $\mathrm{id}\colon V \to V$ die Identität. Zeigen Sie, dass $T^\top = M(\mathrm{id})_{C,B}$.

(d) Sei wieder $V = \mathbb{R}^n$. Folgern Sie aus (b) und (c), dass $T^\top = (\vec{b}_1 \ \dots \ \vec{b}_n)^{-1}(\vec{c}_1 \ \dots \ \vec{c}_n)$. (*Hinweis:* Wenn E die Standardbasis bezeichnet, was ist dann $M(\mathrm{id})_{E,B}M(\mathrm{id})_{C,E}$?)

Lösung: (a) Offenbar ist $T = \begin{pmatrix}\vec{c}_1^\top\\ \vec{c}_2^\top\\ \vec{c}_3^\top\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

(b) Bezeichne $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Standard-Basis. Ist $\vec{c}_i = (c_{i,j})_j$, so folgt $\vec{c}_i = \sum_j c_{ij}\vec{e}_j$ und somit ist $T = \begin{pmatrix}\vec{c}_1^\top\\ \vdots \\ \vec{c}_n^\top\end{pmatrix}$ wie in (a).

(c) Die j-te Spalte von $M(\mathrm{id})_{C,B}$ ist der Koordinatenvektor des Bildes von $\vec{c}_j$ unter id, also von $\vec{c}_j$, bezüglich der Basis B, also der Vektor $(t_{j1} \ \dots \ t_{jn})^\top$.

(d) Einerseits ist nach (c) $M(\mathrm{id})_{E,B}M(\mathrm{id})_{C,E} = M(\mathrm{id} \circ \mathrm{id})_{C,B} = T^\top$. Andererseits ist nach (b) und (c) $M(\mathrm{id})_{C,E} = (\vec{c}_1 \ \dots \ \vec{c}_n)$ und $M(\mathrm{id})_{E,B} = M(\mathrm{id})^{-1}_{B,E} = (\vec{b}_1 \ \dots \ \vec{b}_n)^{-1}$. Damit folgt die Behauptung.

Abzugeben sind alle Aufgaben 1–4.